

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

RECHERCHES

SUR

LE CALCUL DES VARIATIONS,

PIÈCE POUR LE CONCOURS

SUR LA QUESTION RELATIVE AUX MAXIMA ET MINIMA
DES INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR M. SARRUS.

> A force d'étudier un sujet sous toutes sortes de faces,
> on finit par en déduire quelque chose.

L'Académie des sciences de Paris a proposé de trouver les équations aux limites que l'on doit joindre aux équations indéfinies, pour déterminer complétement les maxima et les minima des intégrales multiples.

Elle a demandé, en outre, des applications relatives aux intégrales triples.

J'ai cru devoir essayer de satisfaire aux vœux de l'Académie; je crois avoir réussi, et je viens lui présenter le résultat de mes recherches.

Convaincu, par une longue expérience, que des points de repos nombreux et convenablement choisis facilitent beaucoup la lecture des recherches scientifiques, j'ai partagé mon travail en plusieurs chapitres, chaque chapitre en plusieurs paragraphes, chaque paragraphe en plusieurs articles.

Dans le premier chapitre, je commence par fixer le sens des notations qui seront employées dans le reste de l'ouvrage; après cela, je donne les moyens de différentier, par rapport à un paramètre, soit une intégrale définie quelconque, soit d'autres expressions qui ont une grande analogie avec ces sortes d'intégrales; je déduis de là certaines formules de transformation qui peuvent rendre de grands services dans le calcul des intégrales définies et les applications du calcul aux sciences physiques, et que je regarde comme indispensables dans les applications du calcul des variations. Je termine ce chapitre par des considérations qui permettent de simplifier, dans un grand nombre de cas, les formules générales précédemment obtenues.

Dans le second chapitre, je développe le calcul direct des variations d'après le mode d'exposition adopté par Lagrange : de cette manière, ce développement devient une simple application des calculs du premier chapitre. Les formules trouvées ainsi sont, sans doute, moins symétriques que celles que l'on pourrait trouver d'une autre manière; elles semblent même différer d'une manière absolue de celles que l'on connaissait déjà pour les cas de deux et trois variables; mais je fais voir que cette différence n'est que de pure apparence, et qu'elle ne provient que de ce qu'on a opéré chemin faisant, et sans s'en apercevoir, certaines transformations nécessaires qu'il faudrait effectuer plus tard.



Dans les applications du calcul des variations, on sait ramener

tous les cas à celui où les variations des inconnues sont indépendantes les unes des autres. Dans le troisième chapitre, je suppose la question ramenée à ce point, et je donne les moyens de parvenir, soit aux équations indéfinies, soit aux équations aux limites, que l'on doit joindre à ces dernières pour avoir toutes les équations nécessaires.

Dans le quatrième chapitre, je développe les formules qui ont lieu lorsque le nombre de variables indépendantes ne dépasse pas trois, et j'indique une traduction géométrique de ces formules qui a l'avantage de les matérialiser.

Dans le cinquième et dernier chapitre, je traite trois questions particulières, et j'indique quelques aperçus sur les moyens d'employer les équations aux limites, sans cependant intégrer les équations indéfinies.

Dans tout le cours de ces recherches, je fais un fréquent usage de deux signes d'opérations 7 et ∇, que je me suis vu forcé d'adopter. Le premier est un simple signe de substitution; il peut être extrêmement utile dans les hautes mathématiques, et même dans les parties élémentaires : je crois qu'il serait bon d'introduire dans l'enseignement, soit ce signe même, soit tout autre signe équivalent. Quant au signe ∇, il était moins nécessaire; mais il m'a permis de concentrer dans quelques formules des résultats dont le nombre eût été rebutant, et dont il eût été presque impossible d'apercevoir la loi. Beaucoup de calculs reposent sur certaines propriétés des signes 7 et ∇ qui leur sont communes avec ceux d'intégration et de différentiation, et avec lesquelles il convient de se familiariser; elles se trouvent exposées aux articles 5, 15, 23, 24.

Par inadvertance, le quatrième paragraphe du deuxième chapitre se trouve mal numéroté. Comme aucun renvoi ne se rapporte à ce paragraphe, il n'en résulte aucun inconvénient.

CHAPITRE PREMIER.

I.

1. Pour faciliter la comparaison des intégrales définies multiples, nous supposerons que l'on procède aux intégrations simples dont elles dépendent dans un ordre constant et déterminé, d'après lequel nous classerons les variables indépendantes, de telle manière qu'en désignant les variables par

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots\ x_{n-1},\ x_n,$$

les intégrations simples devront être effectuées dans l'ordre indiqué par l'expression

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots . \int dx_{n-1} \int u dx_n.$$

2. Chacune des variables indépendantes doit être renfermée entre des limites qui dépendent de la question que l'on veut résoudre, et qui sont tantôt connues et tantôt inconnues. Quoi qu'il en soit, nous désignerons les limites inférieures respectives des variables x, x_1, x_2, ... x_n, par

$$x',\ x'_1,\ x'_2,\ \ldots .\ x'_n,$$

et les limites supérieures par

$$x'',\ x''_1,\ x''_2,\ \ldots .\ x''_n.$$

D'ailleurs, d'après la nature des intégrales définies,

Les limites x'_n et x''_n de la variable x_n peuvent être des fonctions de x, x_1, x_2, ... x_{n-1}, mais elles *doivent* être indépendantes de x_n;

Les limites x'_{n-1} et x''_{n-1} de la variable x_{n-1} peuvent être des

fonctions de $x, x_1; x_2 \ldots x_{n-2}$, mais elles *doivent* être indépendantes de x_{n-1} et de x_n;

Et ainsi de suite, jusqu'aux limites de la variable x, qui doivent être indépendantes de x, x_1, x_2, ... x_{n-1} et x_n.

3. Afin de diminuer le nombre de formules, nous désignerons par

$$y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}, y_n,$$

une suite de fonctions, respectivement, de même nature que les limites du dernier article, de telle sorte que, pour un indice quelconque ρ, y_ρ sera indépendante des variables x_ρ, $x_{\rho+1}$, $x_{\rho+2}, \ldots x_n$; mais, à cela près, ces fonctions pourront être quelconques.

Dans les applications, y_ρ devra être remplacée par l'une ou l'autre des limites x'_ρ, x''_ρ.

4. Nous aurons à considérer des expressions que, d'après la notation de Fourrier, nous devrions écrire sous les formes suivantes:

$$\int_{x'}^{x''} udx, \quad \int_{x'_1}^{x''_1} udx_1, \quad \int_{x'_2}^{x''_2} udx_2, \ldots \quad \int_{x'_n}^{x''_n} udx_n,$$
$$\int_{x'_g}^{x''_g} dx_g \int_{x'_{g+1}}^{x''_{g+1}} dx_{g+1} \int_{x'_{g+2}}^{x''_{g+2}} dx_{g+2} \ldots \int_{x'_n}^{x''_n} udx_h;$$

mais pour simplifier les écritures, nous nous bornerons à écrire à leur place

$$\int udx, \quad \int udx_1, \quad \int udx_2, \ldots \ldots \int udx_n,$$
$$\int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2}, \ldots \ldots \int udx_h,$$

et afin d'éviter toute chance d'erreur, nous n'emploierons jamais ces dernières expressions dans une acception différente.

5. Nous emploierons la caractéristique ⅂ dans une acception telle que,

Si dans une fonction quelconque u, dépendant d'une quantité pareillement quelconque p, on vient à remplacer cette dernière

par une nouvelle quantité pareillement quelconque q, l'on obtiendra un certain résultat que nous désignerons par

$$\urcorner^{q}_{p}\, u.$$

De cette manière, nous aurons identiquement

$$(1)\quad \urcorner^{q}_{p} f\left(x, x_1, x_2, \ldots p, \frac{dp}{dx}, \ldots \frac{d^2p}{dx\,dx_1}, \ldots\right) = f\left(x, x_1, x_2, \ldots q, \frac{dq}{dx}, \ldots \frac{d^2q}{dx\,dx_1}, \ldots\right),$$

$$(2)\qquad \int_{p'}^{p''} \frac{dv}{dp}\, dp = \urcorner^{p''}_{p} v - \urcorner^{p'}_{p} v;$$

de plus, si une fonction r ne dépend point de p, nous aurons identiquement

$$(3)\qquad \urcorner^{q}_{p}\, ru = r\, \urcorner^{q}_{p}\, u \quad \text{et} \quad \urcorner^{q}_{p}\, r = r.$$

L'emploi de cette notation ⌝ nous conduira à des expressions de la forme

$$\urcorner^{y}_{x}\, \urcorner^{y_1}_{x_1} u,\quad \urcorner^{y}_{x}\, \urcorner^{y_1}_{x_1}\, \urcorner^{y_2}_{x_2} u, \ldots\ldots \quad \urcorner^{y}_{x}\, \urcorner^{y_1}_{x_1}\, \urcorner^{y_2}_{x_2} \ldots \urcorner^{y_n}_{x_n} u,$$

$$\int dx\, \urcorner^{y_1}_{x_1} u,\quad \int dx \int dx_1\, \urcorner^{y_2}_{x_2} \urcorner^{y_3}_{x_3} u,\quad \int dx \int dx_1 \ldots \int dx_h\, \urcorner^{y_{h+1}}_{x_{h+1}} \ldots \urcorner^{y_n}_{x_n} u,$$

$$\urcorner^{y_g}_{x_g} \ldots \urcorner^{y_{h-1}}_{x_{h-1}} \int dx_h \ldots \int dx_{i-1}\, \urcorner^{y_i}_{x_i} \ldots \urcorner^{y_{k-1}}_{x_{k-1}} \int dx_k \ldots \int u\, dx_h,$$

dont la signification n'a pas besoin d'explication particulière.

6. Afin de pouvoir comprendre sous une forme commune et les intégrales définies et les expressions que nous venons de citer dans notre dernier article, nous aurons recours à une nouvelle caractéristique ∇, que nous emploierons dans une acception telle, qu'en désignant par α_i et β_i deux constantes données, mais d'ailleurs quelconques, l'on ait identiquement

$$(4)\qquad \nabla^{p}_{x_i} u = \alpha_i\, \urcorner^{p}_{x_i} u + \beta_i \int u\, dx_i.$$

Dès lors, en faisant $\alpha_i = 0$ et $\beta_i = 1$, on aura, quelle que soit la valeur de p,

$$\nabla^{p}_{x_i} u = \int u dx_i,$$

tandis qu'en faisant $\beta_i = 0$ et $\alpha_i = 1$, on aura

$$\nabla^{p}_{x_i} u = \urcorner^{p}_{x_i} u,\ \ \nabla^{y_i}_{x_i} u = \urcorner^{y_i}_{x_i} u,\ \ \nabla^{x'_i}_{x_i} = \urcorner^{x'_i}_{x_i} u,\ \ \nabla^{x''_i}_{x_i} u = \urcorner^{x''_i}_{x_i} u.$$

7. Cette nouvelle caractéristique ∇ nous conduira à considérer des expressions telles que

$$\nabla^{y_g}_{x_g} \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \ldots\ldots \nabla^{y_h}_{x_h} u,\ \ \nabla^{y_g}_{x_g} \ldots \nabla^{y_{h-1}}_{x_{h-1}} \urcorner^{y_h}_{x_h} \nabla^{y_{h+1}}_{x_{h+1}} \ldots \nabla^{y_k}_{x_k} u,$$

$$\nabla^{y}_{x} \nabla^{y_1}_{x_1} \ldots \nabla^{y_{g-1}}_{x_{g-1}} \int dx_g \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \ldots \nabla^{y_{h-1}}_{x_{h-1}} \urcorner^{y_h}_{x_h} \nabla^{y_{h+1}}_{x_{h+1}} \ldots \int dx_k \ldots\ \nabla^{y_n}_{x_n} u,$$

dont la forme indique suffisamment la nature.

8. Telles sont les différentes conventions dont nous supposerons l'admission dans tout le cours de ces recherches; en outre, dans les deux premiers chapitres nous désignerons par t un paramètre indépendant de x, x_1, x_2, .. x_n, et que nous supposerons variable.

D'ailleurs, toutes les fois que nous croirons devoir restreindre la généralité des différentes conventions précédentes, nous aurons le soin d'en avertir d'une manière expresse.

2.

9. Pour un moment, nous désignerons par $F(t, x_i)$ une fonction quelconque du paramètre t, de la variable x_i, et, s'il y a lieu, des autres variables indépendantes; en outre, nous ferons

$$\frac{dF(t, x_i)}{dt} = \varphi(t, x_i),$$

$$\frac{d.F(t, x_i)}{dx_i} = \psi(t, x_i):$$

dès lors nous aurons identiquement

$$\frac{d\varphi(t,x_i)}{dx_i} = \frac{d\psi(t,x_i)}{dt}.$$

$$(7)\qquad \frac{d\{F(t,x''_i)-F(t,x'_i)\}}{dt} = \varphi(t,x''_i)-\varphi(t,x'_i)+\frac{dx''_i}{dt}\psi(t,x''_i)-\frac{dx'_i}{dt}\psi(t,x'_i).$$

Mais les équations 5 et 6, intégrées par rapport à x_i, nous donneront

$$F(t,x''_i) - F(t,x'_i) = \int\psi(t,x_i)\,dx_i,$$

$$\varphi(t,x''_i) - \varphi(t,x'_i) = \int dx_i \frac{d\psi(t,x_i)}{dt}.$$

Substituant donc ces valeurs dans l'équation 7, cette dernière changera en

$$(8)\qquad \frac{d\int\psi(t,x_i)\,dx_i}{dt} = \int dx_i\frac{d\psi(t,x_i)}{dt}+\frac{dx''_i}{dt}\psi(t,x''_i)-\frac{dx'_i}{dt}\psi(t,x_i).$$

Maintenant, nous ferons pour abréger,

$$\psi(t,x_i) = u;$$

cela nous donnera (article 5):

$$\frac{d\psi(t,x_i)}{dt} = \frac{du}{dt},\ \psi(t,x'_i) = \daleth^{x'_i}_{x_i}u,\ \psi(t,x''_i) = \daleth^{x''_i}_{x_i}u,$$

et, par suite, l'équation 8 prendra cette nouvelle forme:

$$(9)\qquad \frac{d\int u\,dx_i}{dt} = \int\frac{du}{dt}dx_i + \frac{dx''_i}{dt}\daleth^{x''_i}_{x_i}u - \frac{dx'_i}{dt}\daleth^{x'_i}_{x_i}u,$$

dans laquelle u pourra représenter une fonction quelconque.

10. Après cela, nous remplacerons dans la formule 9, que nous venons de trouver, la fonction u par l'intégrale $\int u\,dx_{i+1}$. Cela nous donnera d'abord

$$\frac{d\int dx_i\int u\,dx_{i+1}}{dt} = \int dx_i\frac{d\int u\,dx_{i+1}}{dt} + \frac{dx''_i}{dt}\daleth^{x''_i}_{x_i}\int u\,dx_{i+1} - \frac{dx'_i}{dt}\daleth^{x'_i}_{x_i}\int u\,dx_{i+1}.$$

Mais un nouveau calcul semblable à celui du dernier article nous donnerait

$$\frac{d\int u dx_{i+1}}{dt} = \int dx_{i+1}\frac{du}{dt} + \frac{dx''_{i+1}}{dt}\rceil^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}} u - \frac{dx'_{i+1}}{dt}\rceil^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}} u;$$

substituant donc cette valeur dans le résultat précédent, il viendra

$$(10)\qquad \frac{d\int dx_i \int u dx_{i+1}}{dt} = \int dx_i \int dx_{i+1}\frac{du}{dt} + \int dx_i \frac{dx''_{i+1}}{dt}\rceil^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}} u$$
$$- \int dx_i \frac{dx'_{i+1}}{dt}\rceil^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}} u + \frac{dx''_i}{dt}\rceil^{x''_i}_{x_i}\int u dx_{i+1} - \frac{dx'_i}{dt}\rceil^{x'_i}_{x_i}\int u dx_{i+1}.$$

11. Après cela, nous pourrons remplacer dans cette dernière formule la fonction u par l'intégrale $\int u dx_{i+2}$, et en continuant de la même manière, nous parviendrons à la formule générale suivante, dans laquelle k exprimera un indice quelconque plus grand que i.

$$(11)\qquad \frac{d\int dx_i \int dx_{i+1}\ldots\int u dx_k}{dt} = \int dx_i \int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k \frac{du}{dt}$$
$$+ \int dx_i \int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\frac{dx''_k}{dt}\rceil^{x''_k}_{x_k}.u$$
$$+ \int dx_i \int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\frac{dx''_{k-1}}{dt}\rceil^{x''_{k-1}}_{x_{k-1}}\int dx_k.u$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int dx_i \int dx_{i+1}\frac{dx''_{i+2}}{dt}\rceil^{x''_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u$$
$$+ \int dx_i \frac{dx''_{i+1}}{dt}\rceil^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u$$
$$+ \frac{dx''_i}{dt}\rceil^{x''_i}_{x_i}\int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u$$
$$- \int dx_i \int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\frac{dx'_k}{dt}\rceil^{x'_k}_{x_k}.u$$
$$- \int dx_i \int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\frac{dx'_{k-1}}{dt}\rceil^{x'_{k-1}}_{x_{k-1}}\int dx_k.u$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \int dx_i \int dx_{i+1}\frac{dx'_{i+2}}{dt}\rceil^{x'_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u$$
$$- \int dx_i \frac{dx'_{i+1}}{dt}\rceil^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u$$
$$- \frac{dx'_i}{dt}\rceil^{x'_i}_{x_i}\int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u,$$

dont la forme est on ne peut plus régulière.

12. On peut donner à la formule que nous venons de trouver une forme plus simple, et par là même plus commode.

Nous avons vu (article 5) que si une quantité r ne dépend point de p, on a identiquement

$$(3) \qquad \daleth_p^q ru = r\,\daleth_p^q u;$$

Nous avons encore vu que, quelle que soit la valeur de l'indice ρ, les limites x'_ρ et x''_ρ ne dépendaient d'aucune des variables x_ρ, $x_{\rho+1}$, $x_{\rho+2}\ldots$

Nous devons donc avoir identiquement

$$(12) \qquad \frac{dx'_\rho}{dt}\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} v = \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} v\,\frac{dx'_\rho}{dt},\quad \frac{dx''_\rho}{dt}\daleth_{x_\rho}^{x''_\rho} v = \daleth_{x_\rho}^{x''_\rho} v\,\frac{dx''_\rho}{dt}.$$

Cela posé, nous remplacerons dans ces deux dernières équations la fonction v par l'intégrale $\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k$, dans laquelle k exprimera un indice quelconque plus grand que ρ, et par là elles se changeront en

$$\frac{dx'_\rho}{dt}\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}\int dx_{\ +1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k = \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}\frac{dx'_\rho}{dt}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k,$$

$$\frac{dx''_\rho}{dt}\daleth_{x_\rho}^{x''_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k = \daleth_{x_\rho}^{x''_\rho}\frac{dx''_\rho}{dt}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k.$$

Mais les facteurs $\frac{dx'_\rho}{dt}$, $\frac{dx''_\rho}{dt}$, étant indépendants des variables $x_{\rho+1}$, $x_{\rho+2},\ldots$ peuvent passer sous les signes d'intégrations relatives à ces variables : nous pouvons donc écrire encore

$$\frac{dx'_\rho}{dt}\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k = \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_k\,.\,u\,\frac{dx'_\rho}{dt},$$

$$\frac{dx''_\rho}{dt}\daleth_{x_\rho}^{x''_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k = \daleth_{x_\rho}^{x''_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_k\,.\,u\,\frac{dx''_\rho}{dt}.$$

Enfin, en désignant par g un indice quelconque moindre que ρ,

nous déduirons de ces deux dernières formules les deux suivantes :

$$\int dx_g \ldots \int dx_{\rho-1} \cdot \frac{dx'_\rho}{dt} \urcorner_{x_\rho}^{x'_\rho} \int dx_{\rho+1} \ldots \int u\,dx_k = \int dx_g \ldots \int dx_{\rho-1} \urcorner_{x_\rho}^{x'_\rho} \int dx_{\rho+1} \ldots \int dx_k \cdot u \frac{dx'_\rho}{dt},$$

$$\int dx_g \ldots \int dx_{\rho-1} \frac{dx''_\rho}{dt} \urcorner_{x_\rho}^{x''_\rho} \int dx_{\rho+1} \ldots \int u\,dx_k = \int dx_g \ldots \int dx_{\rho-1} \urcorner_{x_\rho}^{x''_\rho} \int dx_{\rho+1} \ldots \int dx_k \cdot u \frac{dx''_\rho}{dt},$$

au moyen desquelles l'équation 11 prendra cette nouvelle forme :

$$(13)\quad \begin{aligned} \frac{d \cdot \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int u\,dx_k}{dt} = & \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots\ldots \int dx_k \cdot \frac{du}{dt} \\ & + \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots \quad \urcorner_{x_k}^{x''_k} u \frac{dx''_k}{dt} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \int dx_i \int dx_{i+1} \urcorner_{x_{i+2}}^{x''_{i+2}} \ldots\ldots \int dx_k \cdot u \frac{dx''_{i+2}}{dt} \\ & + \int dx_i \urcorner_{x_{i+1}}^{x''_{i+1}} \int dx_{i+2} \ldots\ldots \int dx_k \cdot u \frac{dx''_{i+1}}{dt} \\ & + \urcorner_{x_i}^{x''_i} \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots\ldots \int dx_k \cdot u \frac{dx''_i}{dt} \\ & - \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots\ldots \urcorner_{x_k}^{x'_k} \; u \frac{dx'_k}{dt} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - \int dx_i \int dx_{i+1} \urcorner_{x_{i+2}}^{x'_{i+2}} \ldots \quad \int dx_k \; u \frac{dx'_{i+2}}{dt} \\ & - \int dx_i \urcorner_{x_{i+1}}^{x'_{i+1}} \int dx_{i+2} \ldots\ldots \int dx_k \; u \frac{dx'_{i+1}}{dt} \\ & - \urcorner_{x_i}^{x'_i} \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots\ldots \int dx_k \; u \frac{dx'_i}{dt}. \end{aligned}$$

13. Comme chacune des variables $x, x_1, \ldots x_{i-1}$ et $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$ qui sont différentes de $x_i, x_{i+1}, \ldots x_k$, peut donner lieu à un calcul semblable à ceux des articles précédents, on voit qu'en désignant par x_μ une quelconque des variables qui sont différentes de $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots x_k$, on aura encore

$$(14)\quad \begin{aligned} \frac{d \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int u\,dx_k}{dx_\mu} = & \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots\ldots \int dx_k \cdot \frac{du}{dx_\mu} \\ & + \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots\ldots \urcorner_{x_k}^{x''_k} \; u \frac{dx''_k}{dx_\mu} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$+ \int dx_i \, \daleth_{x_{i+1}}^{x''_{i+1}} \ldots \int dx_k \, . \, u \, \frac{dx''_{i+1}}{dx_\mu}$$
$$+ \daleth_{x_i}^{x''_i} \int dx_{i+1} \ldots \int dx_k \, . \, u \, \frac{dx''_i}{dx_\mu}$$
$$- \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \daleth_{x_k}^{x'_k} \, u \, \frac{dx'_k}{dx_\mu}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \int dx_i \, \daleth_{x_{i+1}}^{x'_{i+1}} \ldots \int dx_k \, u \, \frac{dx'_{i+1}}{dx_\mu}$$
$$- \daleth_{x_i}^{x'_i} \int dx_{i+1} \ldots \int dx_k \, u \, \frac{dx'_i}{dx_\mu}.$$

Toutefois, il faudra observer que si l'indice μ est plus grand que k, les dérivées

$$\frac{dx'_i}{dx_\mu}, \; \frac{dx'_{i+1}}{dx_\mu}, \; \frac{dx'_{i+2}}{dx_\mu} \ldots \frac{dx'_k}{dx_\mu}, \; \frac{dx''_i}{dx_\mu}, \; \frac{dx''_{i+1}}{dx_\mu}, \ldots \frac{dx''_k}{dx_\mu}$$

seront identiquement nulles, et que, par suite, la formule précédente se réduira à

$$(15) \qquad \frac{d \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int u dx_k}{dx_\mu} = \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int dx_k \, . \, \frac{du}{dx_\mu}.$$

3.

14. Nous consacrerons ce paragraphe à l'exposition de quelques propriétés de la caractéristique de substitution $\daleth$.

D'après ce que nous avons dit (article 5), pour avoir la valeur de

$$\daleth_p^q u,$$

il faut remplacer dans la fonction u la quantité p par la nouvelle quantité q : dès lors, on voit que pour avoir la valeur de

$$\daleth_p^q f(u, v, w, \ldots),$$

il suffira de faire une pareille substitution dans chacune des

fonctions composantes u, v, u;... on aura donc identiquement

$$(16)\qquad \daleth^q_p f(u,\, v,\, w,\ldots) = f\left(\daleth^q_p u,\, \daleth^q_p v,\, \daleth^q_p w,\ldots\right):$$

ce qui nous donnera, comme cas particuliers,

$$(17)\qquad \daleth^q_p(u+v-w+\ldots) = \daleth^q_p u + \daleth^q_p v - \daleth^q_p w + \ldots.$$

$$(18)\qquad \daleth^q_p(u.v.w\ldots) = \daleth^q_p u . \daleth^q_p v . \daleth^q_p w \ldots.$$

15. D'après ce que nous venons de voir, nous aurons d'abord

$$\daleth^{q_1}_{p_1} f(u,\, v,\, w,\ldots) = f\left(\daleth^{q_1}_{p_1} u,\, \daleth^{q_1}_{p_1} v,\, \daleth^{q_1}_{p_1} w,\ldots\right);$$

nous en déduirons

$$\daleth^q_p\, \daleth^{q_1}_{p_1} f(u,\, v,\, w,\ldots) = \daleth^q_p f\left(\daleth^{q_1}_{p_1} u,\, \daleth^{q_1}_{p_1} v,\, \daleth^{q_1}_{p_1} w,\ldots\right),$$

et par suite,

$$(19)\quad \daleth^q_p\, \daleth^{q_1}_{p_1} f(u,\, v,\, w,\ldots) = f\left(\daleth^q_p\, \daleth^{q_1}_{p_1} u,\, \daleth^q_p\, \daleth^{q_1}_{p_1} v,\, \daleth^q_p{}^{q_1}_{p_1} w,\ldots\right).$$

En continuant d'une manière analogue, nous parviendrons à la formule suivante :

$$(20)\quad \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g} f(u,\, v,\, w,\ldots) = f\left(\daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g} u,\, \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g} v,\, \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g} w,\ldots\right)$$

qui nous donnera, comme cas particuliers,

$$(21)\quad \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g}(u+v-w+\ldots) = \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g} u + \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g} - \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g} w + \ldots.$$

$$(22)\quad \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g}(u v . w\ldots) = \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g} u . \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g} v . \daleth^q_p \daleth^{q_1}_{p_1}\ldots\daleth^{q_g}_{p_g} w \ldots.$$

16. Nous avons déjà vu que si r est indépendante de p, on a

$$(3)\qquad \daleth^q_p\, ru = r\daleth^q_p.$$

Supposons maintenant que r est indépendante de p, p_1, p_2,... p_g: dès lors nous aurons

$$\daleth^{q_1}_{p_1} ru = r\daleth^{q_1}_{p_1} u,$$

d'où nous déduirons

$$\daleth_p^q \daleth_{p_1}^{q_1} ru = \daleth_p^q r \daleth_{p_1}^{q_1} u = r \daleth_p^q \daleth_{p_1}^{q_1} u,$$

et en continuant d'une manière analogue, nous trouverons que

$$(23) \qquad \daleth_p^q \daleth_{p_1}^{q_1} \ldots \daleth_{p_g}^{q_g} ru = r \daleth_p^q \daleth_{p_1}^{q_1} \ldots \daleth_{p_g}^{q_g} u,$$

et, comme cas particuliers, que

$$(24) \qquad \daleth_p^q \daleth_{p_1}^{q_1} \ldots \daleth_{p_g}^{q_g} r = r.$$

17. Pour parvenir aux formules de différentiation relatives aux quantités affectées de caractéristiques $\daleth$, nous désignerons encore par $F(t, x_i)$ une fonction quelconque du paramètre t, de la variable x_i, et, s'il y a lieu, des autres variables indépendantes; de plus, comme à l'article 9, nous désignerons par $\varphi(t, x_i)$ et $\psi(t, x_i)$ les deux dérivées partielles de cette fonction prises par rapport à t et x_i : dès lors nous aurons identiquement

$$(25) \qquad \frac{dF(t, q)}{dt} = \varphi(t, q) + \frac{dq}{dt}\psi(t, q).$$

Maintenant faisons $F(t, x_i) = u$, ce qui nous donnera $\varphi(t, x_i) = \frac{du}{dt}$ et $\psi(t, x_i) = \frac{du}{dx_i}$; nous aurons ainsi

$$F(t, q) = \daleth_{x_i}^q u,\ \varphi(t, q) = \daleth_{x_i}^q \frac{du}{dt},\ \psi(t, q) = \daleth_{x_i}^q \frac{du}{dx_i}:$$

par conséquent, l'équation 25 pourra s'écrire sous la forme

$$(26) \qquad \frac{d.\daleth_{x_i}^q u}{dt} = \daleth_{x_i}^q \frac{du}{dt} + \frac{dq}{dt} \daleth_{x_i}^q \frac{du}{dx_i}.$$

De même, en désignant par x_μ une des variables indépendantes qui sont différentes de x_i, nous aurons

$$(27) \qquad \frac{d\daleth_{x_i}^q u}{dx_\mu} = \daleth_{x_i}^q \frac{du}{dx_\mu} + \frac{dq}{dx_\mu} \daleth_{x_i}^q \frac{du}{dx_\mu}.$$

18. Maintenant, nous remplacerons q par y_i dans les deux formules 26 et 27 : cela nous donnera

$$(28)\qquad \frac{d\,\daleth_{x_i}^{y_i} u}{dt} = \daleth_{x_i}^{y_i}\frac{du}{dt} + \frac{dy_i}{dt}\daleth_{x_i}^{y_i}\frac{du}{dx_i},$$

$$(29)\qquad \frac{d\,\daleth_{x_i}^{y_i} u}{dx_\mu} = \daleth_{x_i}^{y_i}\frac{du}{dx_\mu} + \frac{dy_i}{dx_\mu}\daleth_{x_i}^{y_i}\frac{du}{dx_i};$$

mais, par hypothèse, y_i est indépendante de x_i (article 3), et, par suite, il doit en être de même de $\frac{dy_i}{dt}$ et de $\frac{dy_i}{dx_\mu}$: on peut donc, d'après la formule 3 (article 5), faire passer ces dérivées sous le signe $\daleth_{x_i}^{y_i}$; dès lors, en ayant égard à la formule 17 (article 14), nous pourrons écrire

$$(30)\qquad \frac{d\,\daleth_{x_i}^{y_i} u}{dt} = \daleth_{x_i}^{y_i}\left(\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx_i}\frac{dy_i}{dt}\right),$$

$$(31)\qquad \frac{d\,\daleth_{x_i}^{y_i} u}{dx_\mu} = \daleth_{x_i}^{y_i}\left(\frac{du}{dx_\mu} + \frac{du}{dx_i}\frac{dy_i}{dx_\mu}\right).$$

19. Après cela, nous supposerons que la variable x_μ est différente de x_i, x_{i+1}, $x_{i+2}, \ldots x_k$, et nous remplacerons dans la dernière formule la fonction u par $\daleth_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u$: cela nous donnera

$$\frac{d\,\daleth_{x_i}^{y_i}\daleth_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u}{dx_\mu} = \daleth_{x_i}^{y_i}\daleth_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\left(\frac{du}{dx_\mu} + \frac{dy_i}{dx_\mu}\frac{du}{dx_i} + \left(\frac{dy_{i+1}}{dx_\mu} + \frac{dy_{i+1}}{dx_i}\frac{dy_i}{dx_\mu}\right)\frac{du}{dx_{i+1}}\right).$$

et en continuant d'une manière analogue, nous trouverons que

$$(32)\qquad \frac{d\,\daleth_{x_i}^{y_i}\daleth_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\daleth_{x_k}^{y_k} u}{dx_\mu} = \daleth_{x_i}^{y_i}\daleth_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\daleth_{x_k}^{y_k}\left(\frac{du}{dx_\mu} + z_i\frac{du}{dx_i} + z_{i+1}\frac{du}{dx_{i+1}} + \ldots + z_k\frac{du}{dx_k}\right),$$

dans laquelle nous avons fait, pour abréger,

$$(33)\left\{\begin{array}{l} z_i = \frac{dy_i}{dx_\mu}, \\ z_{i+1} = \frac{dy_{i+1}}{dx_\mu} + z_i \frac{dy_{i+1}}{dx_i}, \\ z_{i+2} = \frac{dy_{i+2}}{dx_\mu} + z_i \frac{dy_{i+2}}{dx_i} + z_{i+1} \frac{dy_{i+2}}{dx_{i+1}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_k = \frac{dy_k}{dx_\mu} + z_i \frac{dy_k}{dx_i} + z_{i+1} \frac{dy_k}{dx_{i+1}} + \dots + z_k \frac{dy_k}{dx_k}. \end{array}\right.$$

20. Nous pourrions donner à la dérivée

$$\frac{d\, ?_{x_i}^{y_i}\, ?_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \dots ?_{x_k}^{y_k}\, u}{dt}$$

une forme analogue à la précédente, mais elle nous serait de peu d'utilité; nous chercherons donc à lui en donner une autre. Pour cela, nous remplacerons dans la formule 28 la fonction u par l'expression

$$?_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \dots ?_{x_k}^{y_k}\, u:$$

nous trouverons ainsi

$$\frac{d\, ?_{x_i}^{y_i}\, ?_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \dots ?_{x_k}^{y_k}\, u}{dt} = ?_{x_i}^{y_i} \left\{ \frac{d.\, ?_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \dots ?_{x_k}^{y_k}\, u}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \frac{d.\, ?_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \dots ?_{x_k}^{y_k}\, u}{dx_i} \right\};$$

mais si nous développons au moyen de la formule 32, article 19, la valeur de la dérivée

$$\frac{d\, ?_{x_{\rho+1}}^{y_{\rho+1}}\, ?_{x_{\rho+2}}^{y_{\rho+2}} \dots ?_{x_k}^{y_k}\, u}{dx_s},$$

elle se présentera sous la forme

$$?_{x_{\rho+1}}^{y_{\rho+1}}\, ?_{x_{\rho+2}}^{y_{\rho+2}} \dots ?_{x_k}^{y_k}\, u_{(\rho,\, k)},$$

en désignant par $u\,(\rho,\, k)$ le développement que l'on obtiendrait

pour la partie qui est comprise entre deux parenthèses dans le second membre de cette formule. Nous pourrons donc écrire l'équation ci-dessus sous cette nouvelle forme :

$$\frac{d\,7_{x_i}^{y_i}7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\ldots 7_{x_k}^{y_k}u}{dt}=7_{x_i}^{y_i}\left\{\frac{d\,7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}7_{x_{i+2}}^{y_{i+2}}\ldots 7_{x_k}^{y_k}u}{dt}+\frac{dy_i}{dt}7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}7_{x_{i+2}}^{y_{i+2}}\ldots 7_{x_k}^{y_k}u_{(i,\,k)}\right\};$$

de plus, comme y_i est indépendante des variables x_i, x_{i+1}, x_{i+2},... nous pourrons faire passer $\frac{dy_i}{dt}$ sous les signes $7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}$, $7_{x_{i+2}}^{y_{i+2}}$,... (formule 23) : nous aurons donc encore

$$(34)\qquad \frac{d\,7_{x_i}^{y_i}7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\ldots 7_{x_k}^{y_k}}{dt}=7_{x_i}^{y_i}\left\{\frac{d\,7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}7_{x_{i+2}}^{y_{i+2}}\ldots 7_{x_k}^{y_k}u}{dt}+7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}7_{x_{i+2}}^{y_{i+2}}\ldots 7_{x_k}^{y_k}u_{(i,\,k)}\frac{dy_i}{dt}\right\}.$$

Après cela, nous remplacerons la dérivée

$$\frac{d\,7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}7_{x_{i+2}}^{y_{i+2}}\ldots 7_{x_k}^{y_k}u}{dt}$$

par une valeur analogue au second membre de l'équation 34, et, en continuant de la même manière, nous arriverons à cette formule :

$$(35)\qquad \frac{d\,7_{x_i}^{y_i}7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\ldots 7_{x_k}^{y_k}u}{dt}=7_{x_i}^{y_i}7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\ldots 7_{x_k}^{y_k}\left\{\frac{du}{dt}+u_{(i,\,k)}\frac{dy_i}{dt}+u_{(i+1,\,k)}\frac{dy_{i+1}}{dt}+\ldots+u_{(k,\,k)}\frac{dy_k}{dt}\right\}.$$

21. Pour le moment, nous ne pousserons pas plus loin la recherche des propriétés de la caractéristique 7, et nous passerons à celle des propriétés de la caractéristique ∇.

4.

22. Nous commencerons par faire observer que, d'après les conventions de l'article 6, nous devons avoir identiquement

$$\begin{aligned}
\nabla^p_{x_i} u &= \alpha_i \daleth^p_{x_i} u + \beta_i \int u dx_i,\\
\nabla^p_{x_i} v &= \alpha_i \daleth^p_{x_i} v + \beta_i \int v dx_i,\\
\nabla^p_{x_i} w &= \alpha_i \daleth^p_{x_i} w + \beta_i \int w dx_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

D'un autre côté, nous devons avoir encore (formule 17, art. 14)

$$\daleth^p_{x_i}(u+v-w+\ldots) = \daleth^p_{x_i} u + \daleth^p_{x_i} v - \daleth^p_{x_i} w + \ldots\ldots\ldots,$$

et, de plus,

$$\int dx_i (u + v - w + \ldots) = \int u dx_i + \int v dx_i - \int w dx_i + \ldots\ldots;$$

nous pouvons donc en conclure que

$$(36) \qquad \nabla^p_{x_i}(u+v-w+\ldots) = \nabla^p_{x_i} u + \nabla^p_{x_i} v - \nabla^p_{x_i} w + \ldots\ldots,$$

comme pour les signes de différentiation, d'intégration et de substitution.

23. Un nouveau calcul semblable au précédent nous donnerait encore

$$\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}(u+v-w+\ldots) = \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u + \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} v - \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} w + \ldots,$$

et nous en déduirions

$$\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}(u+v-w+\ldots) = \nabla^{p_i}_{x_i}\left(\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u + \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} v - \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} w + \ldots\right);$$

et, par suite,

$$(37) \qquad \nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}(u+v-w+\ldots) = \nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u + \nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} v - \nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} w + \ldots$$

En continuant d'une manière analogue, nous trouverons qu'en général

$$(38)\quad \nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k}(u+v-w+\ldots)=\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k}u$$
$$+\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k}v-\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k}w+\ldots,$$

dans laquelle p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, ... p_k, peuvent représenter des fonctions quelconques.

24. En supposant que r ne dépende point de x_i, nous devons avoir identiquement (article 5)

$$\daleth^p_{x_i} ru = r\daleth^p_{x_i} u;$$

d'ailleurs, nous aurons encore

$$\int rudx_i = r\int udx_i,$$

et, de plus, d'après les conventions de l'article 6,

$$\nabla^p_{x_i} ru = \alpha_i\daleth^p_{x_i} ru + \beta_i\int urdx_i;$$

nous pouvons donc en conclure:

$$(39)\quad \nabla^p_{x_i} ru = r\nabla^p_{x_i} u;$$

toutefois, on ne devra pas perdre de vue que cette équation n'est vraie, du moins en général, qu'autant que r est indépendante de x_i.

Supposons maintenant que r est indépendante des variables x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_k, alors un nouveau calcul, semblable au précédent, nous donnerait

$$\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} ru = r\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u,$$

d'où nous tirerions

$$\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} ru = \nabla^{p_i}_{x_i} r\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u = r\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u;$$

et en continuant d'une manière semblable, nous trouverions d'abord

$$(40)\qquad \nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k} ru = r\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\ldots\nabla^{p_k}_{x_k} u,$$

et, par suite,

$$(41)\qquad \nabla^{p_h}_{x_h}\ldots\nabla^{p_{i-1}}_{x_{i-1}}\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k} ru = \nabla^{p_h}_{x_h}\ldots\nabla^{p_{i-1}}_{x_{i-1}}\left(r\nabla^{p_i}_{x_i}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k} u\right).$$

25. Maintenant, nous passerons à la différentiation des expressions affectées de la caractéristique ∇. Pour cela, nous reprendrons l'équation de définition

$$\nabla^p_{x_i} u = \alpha_i \urcorner^p_{x_i} u + \beta_i \int u dx_i,$$

et nous en déduirons d'abord

$$\frac{d\nabla^p_{x_i} u}{dt} = \alpha_i \frac{d\urcorner^p_{x_i} u}{dt} + \beta_i \frac{d\int u dx_i}{dt};$$

après cela, nous développerons le second membre au moyen des formules 26 et 9, et nous trouverons

$$\frac{d\nabla^p_{x_i} u}{dt} = \alpha_i \urcorner^p_{x_i}\frac{du}{dt} + \frac{dp}{dt}\alpha_i\urcorner^p_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \beta_i\int dx_i \frac{du}{dt} + \beta_i\frac{dx''_i}{dt}\urcorner^{x''_i}_{x_i} u$$
$$- \beta_i\frac{dx'_i}{dt}\urcorner^{x'_i}_{x_i} u.$$

Mais les deux parties qui renferment la dérivée $\frac{du}{dt}$ peuvent se réduire au moyen de la caractéristique $\nabla^p_{x_i}$: effectuant donc cette réduction, il viendra

$$(42)\qquad \frac{d\nabla^p_{x_i} u}{dt} = \nabla^p_{x_i}\frac{du}{dt} + \alpha_i\frac{dp}{dt}\urcorner^p_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \beta_i\frac{dx''_i}{dt}\urcorner^{x''_i}_{x_i} u - \beta_i\frac{dx'_i}{dt}\urcorner^{x'_i}_{x_i} u.$$

De même, en désignant par x_μ une des variables indépendantes qui sont différentes de x_i, nous aurons encore

$$(43)\qquad \frac{d\nabla^p_{x_i} u}{dx_\mu} = \nabla^p_{x_i}\frac{du}{dx_\mu} + \alpha_i\frac{dp}{dx_\mu}\urcorner^p_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \beta_i\frac{dx''_i}{dx_\mu}\urcorner^{x''_i}_{x_i} u - \beta_i\frac{dx'_i}{dx_\mu}\urcorner^{x'_i}_{x_i} u.$$

26. Après cela, nous ferons observer que l'on a identiquement (art. 6)

$$\nabla_{x_i}^{p} \frac{du}{dx_i} = \alpha_i \daleth_{x_i}^{p} \frac{du}{dx_i} + \beta_i \int \frac{du}{dx_i}\, dx_i;$$

et comme, d'ailleurs, on a encore (art. 5)

$$\int \frac{du}{dx_i}\, dx_i = \daleth_{x_i}^{x''_i} u - \daleth_{x_i}^{x'_i} u,$$

nous en conclurons que

$$\nabla_{x_i}^{p} \frac{du}{dx_i} = \alpha_i \daleth_{x_i}^{p} \frac{du}{dx_i} + \beta_i \daleth_{x_i}^{x''_i} u - \beta_i \daleth_{x_i}^{x'_i} u.$$

Nous tirerons de cette dernière la valeur de

$$\alpha_i \daleth_{x_i}^{p} \frac{du}{dx_i}$$

pour la substituer dans les équations 42 et 43, et nous trouverons

$$(44)\quad \frac{d \nabla_{x_i}^{p} u}{dt} = \nabla_{x_i}^{p} \frac{du}{dt} + \frac{dp}{dt} \nabla_{x_i}^{p} \frac{du}{dx_i} + \beta_i \left(\frac{dx''_i}{dt} - \frac{dp}{dt}\right) \daleth_{x_i}^{x''_i} u + \beta_i \left(\frac{dp}{dt} - \frac{dx'_i}{dt}\right) \daleth_{x_i}^{x'_i} u.$$

$$(45)\quad \frac{d \nabla_{x_i}^{p} u}{dx_\mu} = \nabla_{x_i}^{p} \frac{du}{dx_\mu} + \frac{dp}{dx_\mu} \nabla_{x_i}^{p} \frac{du}{dx_i} + \beta_i \left(\frac{dx''_i}{dx_\mu} - \frac{dp'}{dx_u}\right) \daleth_{x_i}^{x''_i} u + \beta_i \left(\frac{dp}{dx_\mu} - \frac{dx'_i}{dx_\mu}\right) \daleth_{x_i}^{x'_i} u.$$

27. Remplaçons dans la formule 45 la fonction p par y_i, et faisant pour abréger, quelle que puisse être la valeur de l'indice ρ,

$$\beta_\rho\,(y_\rho - x_\rho') = y_\rho' \text{ et } \beta_\rho\,(x_\rho'' - y_\rho) = y_\rho'',$$

nous aurons

$$\frac{d\nabla^{y_i}_{x_i}u}{dx_\mu} = \nabla^{y_i}_{x_i}\frac{du}{dx_\mu} + \frac{dy_i}{dx_\mu}\nabla^{y_i}_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \frac{dy''_i}{dx_\mu}\daleth^{x''_i}_{x_i}u + \frac{dy'_i}{dx_\mu}\daleth^{x'_i}_{x_i}u,$$

ou bien, en faisant passer $\frac{dy_i}{dx_\mu}$ sous le signe $\nabla^{y_i}_{x_i}$, ce qui est permis (art. 24), puisque y_i ne dépend point de x_i, nous aurons (en observant que $\frac{dy''_i}{dx_\mu}$ et $\frac{dy'_i}{dx_\mu}$ peuvent aussi passer sous les signes $\daleth^{x''_i}_{x_i}$, $\daleth^{x'_i}_{x_i}$)

$$(46)\quad \frac{d\nabla^{y_i}_{x_i}u}{dx_\mu} = \nabla^{y_i}_{x_i}\frac{du}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i}\frac{du}{dx_i}\frac{dy_i}{dx_\mu} + \daleth^{x''_i}_{x_i}u\,\frac{dy''_i}{dx_\mu} + \daleth^{x'_i}_{x_i}u\,\frac{dy'_i}{dx_\mu}.$$

28. Après cela, nous remplacerons dans cette dernière formule la fonction u par $\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}u$. Cela nous donnera d'abord

$$\frac{d\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}u}{dx_\mu} = \nabla^{y_i}_{x_i}\frac{d\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}u}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i}\frac{d\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}u}{dx_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_\mu} + \daleth^{x''_i}_{x_i}\frac{dy''_i}{dx_\mu}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}u$$
$$+ \daleth^{x'_i}_{x_i}\frac{dy'_i}{dx}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}u,$$

et, par suite,

$$\frac{d\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}u}{dx_\mu} = \nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\frac{du}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\frac{du}{dx_i}\frac{dy_i}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\frac{du}{dx_{i+1}}\frac{dy_{i+1}}{dx_\mu}$$
$$+ \nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\frac{du}{dx_{i+1}}\frac{dy_{i+1}}{dx_i}\frac{dy_i}{dx_\mu}$$
$$+ \daleth^{x''_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}u\,\frac{dy''_i}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i}\daleth^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}}u\,\frac{dy''_{i+1}}{dx_\mu}$$
$$+ \nabla^{y_i}_{x_i}\daleth^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}}u\,\frac{dy''_{i+1}}{dx_i}\frac{dx_i}{dx_\mu}$$
$$+ \daleth^{x'_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}u\,\frac{dy'_i}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i}\daleth^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}}u\,\frac{dy'_{i+1}}{dx_\mu}$$
$$+ \nabla^{y_i}_{x_i}\daleth^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}}u\,\frac{dy'_{i+1}}{dx_i}\frac{dy_i}{dx_\mu}.$$

29. En continuant d'une manière analogue, nous parviendrons à cette formule générale :

$$(47)\quad \begin{aligned} \frac{d\,\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dx_\mu} &= \nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\frac{du}{dx_\mu} \\ &+ \Sigma\,\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\ldots\nabla^{y_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\frac{du}{dx_\rho}z_\rho \\ &+ \Sigma\,\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\ldots\rceil^{x''_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\,z''_\rho \\ &+ \Sigma\,\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\ldots\rceil^{x'_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\,z'_\rho, \end{aligned}$$

dans laquelle le signe Σ indique la somme de tous les termes que l'on peut former en prenant successivement les nombres i, $i+1$, $i+2, \ldots k$ comme valeurs de ρ, tandis que les facteurs z_ρ, z_ρ'' et z_ρ' sont formés comme dans l'article 19, de telle manière que l'on ait

$$(48)\quad \left\{ \begin{aligned} z_i &= \frac{dy_i}{dx_\mu}, \\ z_{i+1} &= \frac{dy_{i+1}}{dx_\mu} + \frac{dy_{i+1}}{dx_i}z_i, \\ z_{i+2} &= \frac{dy_{i+2}}{dx_\mu} + \frac{dy_{i+2}}{dx_i}z_i + \frac{dy_{i+2}}{dx_{i+1}}z_{i+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_k &= \frac{dy_k}{dx_\mu} + \frac{dy_k}{dx_i}z_i + \frac{dy_k}{dx_{i+1}}z_{i+1} + \ldots + \frac{dy_k}{dx_{k-1}}z_{k-1}; \\ z''_i &= \frac{dy''_i}{dx_\mu}, \\ z''_{i+1} &= \frac{dy''_{i+1}}{dx_\mu} + \frac{dy''_{i+1}}{dx_i}z_i, \\ z''_{i+2} &= \frac{dy''_{i+2}}{dx_\mu} + \frac{dy''_{i+2}}{dx_i}z_i + \frac{dy''_{i+2}}{dx_{i+1}}z_{i+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z''_k &= \frac{dy''_k}{dx_\mu} + \frac{dy''_k}{dx_i}z_i + \frac{dy''_k}{dx_{i+1}}z_{i+1} + \ldots + \frac{dy''_k}{dx_{k-1}}z_{k-1}; \\ z'_i &= \frac{dy'_i}{dx_\mu}, \\ z'_{i+1} &= \frac{dy'_{i+1}}{dx_\mu} + \frac{dy'_{i+1}}{dx_i}z_i, \\ z'_{i+2} &= \frac{dy'_{i+2}}{dx_\mu} + \frac{dy'_{i+2}}{dx_i}z_i + \frac{dy'_{i+2}}{dx_{i+1}}z_{i+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z'_k &= \frac{dy'_k}{dx_\mu} + \frac{dy'_k}{dx_i}z_i + \frac{dy'_k}{dx_{i+1}}z_{i+1} + \ldots + \frac{dy'_k}{dx_{k-1}}z_{k-1}. \end{aligned} \right.$$

30. Nous pourrions donner une formule analogue pour la valeur de la dérivée

$$\frac{d\,\nabla^{y_i}_{x_i}\,\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u}{dt};$$

mais, comme dans l'article 20, nous préférons lui donner une forme plus appropriée à nos recherches des chapitres suivants. Ainsi, nous reprendrons l'équation

$$(42)\quad \frac{d\,\nabla^{p}_{x_i}\,u}{dt}=\nabla^{p}_{x_i}\frac{du}{dt}+\alpha_i\frac{dp}{dt}\urcorner^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i}+\beta_i\frac{dx''_i}{dt}\urcorner^{x''_i}_{x_i}u-\beta_i\frac{dx'_i}{dt}\urcorner^{x'_i}_{x_i}u,$$

et nous remplacerons p par y_i et u par

$$\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\,\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u.$$

Cela nous donnera pour résultat

$$\begin{aligned}(49)\quad \frac{d\,\nabla^{y_i}_{x_i}\,\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u}{dt}&=\nabla^{y_i}_{x_i}\frac{d\,\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\,\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u}{dt}\\&+\alpha_i\frac{dy_i}{dt}\urcorner^{y_i}_{x_i}\frac{d\,\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\,\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u}{dx_i}\\&+\beta_i\frac{dx''_i}{dt}\urcorner^{x''_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\,\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u\\&-\beta_i\frac{dx'_i}{dt}\urcorner^{x'_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\,\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u.\end{aligned}$$

Mais si on développe la valeur de la dérivée

$$\frac{d\,\nabla^{y_{\rho+1}}_{x_{\rho+1}}\,\nabla^{y_{\rho+2}}_{x_{\rho+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u}{dx_\rho}$$

au moyen de la formule 47, on trouvera un résultat de la forme

$$\nabla^{y_{\rho+1}}_{x_{\rho+1}}\,\nabla^{y_{\rho+2}}_{x_{\rho+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u_{(\rho,k)}$$

dans lequel $u_{(\rho,k)}$ exprimera une fonction connue. Dès lors, au

moyen de ces sortes de fonctions auxiliaires, l'équation 49 pourra s'écrire sous la forme suivante :

$$(50)\quad \frac{d\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt} = \nabla^{y_i}_{x_i}\frac{d\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt}$$
$$+\alpha_i\daleth^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u_{(i,k)}\frac{dy_i}{dt}$$
$$+\beta_i\daleth^{x''_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx''_i}{dt}$$
$$-\beta_i\daleth^{x'_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx'_i}{dt},$$

en observant de faire passer sous les signes $\daleth^{y}_{x_i}$, $\daleth^{x''_i}_{x_i}$, $\daleth^{x'_i}_{x_i}$, $\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}$, $\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}, \dots \nabla^{y_k}_{x_k}$, les facteurs $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dx''_i}{dt}$, $\frac{dx'_i}{dt}$, qui sont indépendants des variables x_i, x_{i+1}, $x_{i+2}\dots x_k$.

Après cela nous développerons, par un procédé analogue, la dérivée

$$\frac{d\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt}$$

qui entre dans le second membre de l'équation 50, et, par suite, cette équation se changera en

$$\frac{d\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt} = \nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\frac{d\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt}$$
$$+\alpha_{i+1}\nabla^{y_i}_{x_i}\daleth^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_i}_{x_i}u_{(i+1,k)}\frac{dy_{i+1}}{dt}$$
$$+\alpha_i\daleth^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u_{(i,k)}\frac{dy_i}{dt}$$
$$+\beta_{i+1}\nabla^{y_i}_{x_i}\daleth^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx''_{i+1}}{dt}$$
$$+\beta_i\daleth^{x''_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx''_i}{dt}$$
$$-\beta_{i+1}\nabla^{y_i}_{x_i}\daleth^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx'_{i+1}}{dt}$$
$$-\beta_i\daleth^{x'_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\dots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx'_i}{dt}.$$

En continuant de la même manière, nous trouverons que

$$(51)\quad \frac{d\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt} = \nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{y_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\frac{du}{dt}$$
$$+\Sigma\alpha_\rho\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\daleth^{y_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u_{(\rho,k)}\frac{dy_\rho}{dt}$$
$$+\Sigma\beta_\rho\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\daleth^{x''_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx''_\rho}{dt}$$
$$-\Sigma\beta_\rho\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\daleth^{x'_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx'_\rho}{dt},$$

dans laquelle le signe Σ indique la somme des termes que l'on peut former, en prenant successivement les nombres i, $i+1$, $i+2,\ldots,k$, pour les valeurs de ρ.

5.

31. Nous passerons maintenant aux formules de transformation, et pour cela nous rappellerons que, d'après les conventions de l'article 5, nous devons avoir identiquement

$$(2)\qquad \int\frac{du}{dx_g}\,dx_g = \daleth^{x''_g}_{x_g}u - \daleth^{x'_g}_{x_g}u.$$

Remplaçons dans cette identité la fonction u par l'intégrale

$$\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\ldots\int dx_{h-1}\int u\,dx_h,$$

et nous aurons pour résultat

$$\int dx_g\frac{d\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\ldots\int u\,dx_h}{dx_g} = \daleth^{x''_g}_{x_g}\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\ldots\int dx_{h-1}\int u\,dx_h$$
$$-\daleth^{x'_g}_{x_g}\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\ldots\int dx_{h-1}\int u\,dx_h.$$

Après cela nous développerons, au moyen de la formule 14,

article 13, la dérivée qui entre dans le premier membre. Nous trouverons ainsi :

$$
(52)\quad \left.\begin{array}{l}
\int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \,.\, \frac{du}{dx_g} \\
+ \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \ldots \int dx_{h-1} \mathop{\urcorner}\limits_{x_h}^{x''_h} u \frac{dx''_h}{dx_g} \\
+ \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \ldots\ldots \mathop{\urcorner}\limits_{x_{h-1}}^{x''_{h-1}} \int dx_h \, u \frac{dx''_{h-1}}{dx_g} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \int dx_g \int dx_{g+1} \mathop{\urcorner}\limits_{x_{g+2}}^{x''_{g+2}} \ldots\ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx''_{g+2}}{dx_g} \\
+ \int dx_g \mathop{\urcorner}\limits_{x_{g+1}}^{x''_{g+1}} \int dx_{g+2} \ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx''_{g+1}}{dx_g} \\
- \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \ldots \int dx_{h-1} \mathop{\urcorner}\limits_{x}^{x'_h} u \frac{dx'_h}{dx_g} \\
- \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \ldots \mathop{\urcorner}\limits_{x_{h-1}}^{x'_{h-1}} \int dx_h \, u \frac{dx'_{h-1}}{dx_g} \\
- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
- \int dx_g \int dx_{g+1} \mathop{\urcorner}\limits_{x_{g+2}}^{x'_{g+2}} \ldots\ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx'_{g+2}}{dx_g} \\
- \int dx_g \mathop{\urcorner}\limits_{x_{g+1}}^{x'_{g+1}} \int dx_{g+2} \ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx'_{g+1}}{dx_g}
\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}
\mathop{\urcorner}\limits_{x_g}^{y''_g} \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \,.\, u \\
- \mathop{\urcorner}\limits_{x_g}^{x'_g} \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \,.\, u ;
\end{array}\right.
$$

enfin, nous tirerons de cette dernière équation la valeur de l'intégrale

$$\int dx_g \int dx_{g+1} \ldots\ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \,.\, \frac{du}{dx_g}$$

qui forme le premier terme du premier membre de cette équation, et nous trouverons ainsi :

$$
(53)\quad \int dx_g \int dx_{g+} \ldots\ldots \int dx_{h1} \int dx_h \frac{du}{dx_g} = \begin{array}{l}
\mathop{\urcorner}\limits_{x_g}^{x''_g} \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \ldots\ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \\
- \int dx_g \mathop{\urcorner}\limits_{x_{g+1}}^{x''_{g+1}} \int dx_{g+2} \ldots\ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx''_{g+1}}{dx_g} \\
- \int dx_g \int dx_{g+1} \mathop{\urcorner}\limits_{x_{g+2}}^{x''_{g+2}} \ldots\ldots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx''_{g+2}}{dx_g} \\
- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
- \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \ldots\ldots \mathop{\urcorner}\limits_{x_{h+1}}^{x''_{h+1}} \int dx_h \, u \frac{dx''_{h+1}}{dx_g} \\
- \int dx_g \int dx_{g+2} \int dx_{g+3} \ldots\ldots \int dx_{h+1} \mathop{\urcorner}\limits_{x_h}^{x''_h} u \frac{dx''_{h+1}}{dx_g}
\end{array}
$$

$$- 1_{x_g}^{x'_g} \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h\, u$$

$$+ \int dx\, 1_{x_{g+1}}^{x'_{g+1}} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h\, u\, \frac{dx'_{g+1}}{dx_g}$$

$$+ \int dx_g \int dx_{g+1}\, 1_{x_{g+2}}^{x'_{g+2}} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h\, u\, \frac{dx'_{g+2}}{dx_g}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots 1_{x_{h-1}}^{x'_{h-1}} \int dx_h\, u\, \frac{dx'_{h-1}}{dx_g}$$

$$+ \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1}\, 1_{x_h}^{x'_h}\, u\, \frac{dx'_h}{dx_g}$$

32. Après cela nous calculerons, au moyen de la dernière formule, la valeur de

$$\int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \dots \int dx_k \frac{du}{dx_\rho},$$

et, en la substituant dans l'intégrale

$$\int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \dots \int dx_k \frac{du}{dx_\rho}$$

nous trouverons

(54) $$\int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \dots \int dx_k \int dx_{k-1}. \frac{du}{dx_\rho}$$

$$= \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int dx_{\rho-1}\, 1_{x_\rho}^{x''_\rho} \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \dots \int dx_{k-1} \int dx_k.\, u$$

$$- \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho\, 1_{x_{\rho+1}}^{x''_{\rho+1}} \int dx_{\rho+2} \dots \int dx_{k-1} \int dx_k.\, u\, \frac{dx''_{\rho+1}}{dx_\rho}$$

$$- \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1}\, 1_{x_{\rho+2}}^{x''_{\rho+2}} \dots \int dx_{k-1} \int dx_k.\, u\, \frac{dx''_{\rho+2}}{dx_\rho}$$

$$- \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$- \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \dots 1_{x_{k-1}}^{x''_{k-1}} \int dx_k\, u\, \frac{dx''_{k-1}}{dx_\rho}$$

$$- \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \dots \int dx_{k-1}\, 1_{x_k}^{x_k}\, u\, \frac{dx''_k}{dx_\rho}$$

$$- \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int dx_{\rho-1}\, 1_{x_\rho}^{x'_\rho} \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \dots \int dx_{k-1} \int dx_k.\, u$$

$$+ \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho\, 1_{x_{\rho+1}}^{x'_{\rho+1}} \int dx_{\rho+2} \dots \int dx_{k-1} \int dx_k.\, u\, \frac{dx'_{\rho+1}}{dx_\rho}$$

$$+ \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \daleth_{x_{\rho+2}}^{x'_{\rho+2}} \ldots \int dx_{k-1} \int dx_k. \; u \; \frac{dx'_{\rho+2}}{dx_\rho}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \daleth_{x_{\rho-1}}^{x'_{k-1}} \int dx_k. \; u \; \frac{dx'_{k-1}}{dx_\rho}$$

$$+ \int dx_i \int dn_{i+1} \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_{k-1} \daleth_{x_k}^{x'_k} \; u \; \frac{dx'_k}{dx_\rho}$$

dont la forme est on ne peut plus régulière.

33. Nous reprendrons encore l'identité

$$\int \frac{du}{dx_g} dx_g = \daleth_{x_g}^{x''_g} u - \daleth_{x_g}^{x'_g} u,$$

et nous remplacerons la fonction u par l'expression :

$$\nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_{h-1}}^{y_{h-1}} \nabla_{x_h}^{y_h} u:$$

cela nous donnera

$$\int dx_g \frac{d \nabla_{y_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_h}^{y_h} u}{dx_g} = \daleth_{x_g}^{x''_g} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_{h-1}}^{y_{h-1}} \nabla_{x_h}^{y_h} u.$$
$$- \daleth_{x_g}^{x'_g} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_{h-1}}^{y_{h-1}} \nabla_{x_h}^{y_h} u$$

Mais un calcul semblable à celui de l'article 29 nous donnera le développement de

$$\frac{d \; \nabla_{x_{h+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_h}^{y_h} u,}{dx_g}$$

que nous substituerons dans cette formule. Nous trouverons ainsi :

$$\left.\begin{aligned} &\int dx_g \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots\ldots \nabla_{x_h}^{y_h} \frac{du}{dx_g} \\ + \Sigma &\int dx_g \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \ldots \nabla_{x_\rho}^{y_\rho} \ldots \nabla_{x_h}^{y_h} \frac{du}{dx_\rho} z_\rho \\ + \Sigma &\int dx_g \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \ldots \daleth_{x_\rho}^{x''_\rho} \ldots \nabla_{x_h}^{y_h} u \; z''_\rho \\ + \Sigma &\int dx_g \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \ldots \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \nabla_{x_h}^{y_h} u \; z'_\rho \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &\daleth_{x_g}^{x''_g} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_h}^{y_h} u \\ - &\daleth_{x_g}^{x'_g} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x^h}^{y_h} u \end{aligned}\right.$$

dans la laquelle le Σ indique que l'on doit prendre la somme des termes que l'on peut former en prenant successivement pour ρ les nombres g_{+1}, $g_{+2} \ldots h$, quant aux valeurs de z_ρ, z''_ρ, z'_ρ; elles se formeront d'une manière analogue à celle de l'article 29.

Après cela nous tirerons de cette dernière équation la valeur de

$$\int dx_g \, \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \nabla^{y_{g+2}}_{x_{g+2}} \ldots \nabla^{y_h}_{x_h} \frac{dx}{dx_g},$$

et nous trouverons :

$$(55) \quad \int dx_g \, \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \nabla^{y_{g+2}}_{x_{g+2}} \ldots \nabla^{y_h}_{x_h} \frac{du}{dx_g} = \daleth^{x''_g}_{x_g} \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \nabla^{y_{g+2}}_{x_{g+2}} \ldots \nabla^{y_h}_{x_h} u$$
$$- \daleth^{x'_g}_{x_g} \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \nabla^{y_{g+2}}_{x_{g+2}} \ldots \nabla^{y_h}_{x_h} u$$
$$- \Sigma \int dx_g \, \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \ldots \nabla^{y_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{y_h}_{x^h} \frac{du}{dx_\rho} z_\rho$$
$$- \Sigma \int dx_g \, \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \ldots \daleth^{x''_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{y_h}_{x_h} u \, z''_\rho$$
$$- \Sigma \int dx_g \, \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \ldots \daleth^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{y_h}_{x_h} u \, z'_\rho.$$

34. Enfin, nous partirons de cette dernière formule, et, en opérant comme dans l'article 32, nous en déduirons

$$(56) \quad \nabla^{y_h}_{x_h} \ldots \nabla^{y_{i-1}}_{x_{i-1}} \int dx_i \, \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} \ldots \nabla^{y_k}_{x_k} \frac{du}{dx_i} = \nabla^{y_h}_{x_h} \ldots \nabla^{y_{i-1}}_{x_{i-1}} \daleth^{x''_i}_{x_i} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} \ldots \nabla^{y_k}_{x_k} u$$
$$- \nabla^{y_h}_{x_h} \ldots \nabla^{y_{i-1}}_{x_{i-1}} \daleth^{x'_i}_{x_i} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} \ldots \nabla^{y_k}_{x_k} u$$
$$- \Sigma \nabla^{y_h}_{x_h} \ldots \nabla^{y_{i-1}}_{x_{i-1}} \int dx_i \, \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} \ldots \nabla^{y_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{y_k}_{x_k} \frac{du}{dx_\rho} z_\rho$$
$$- \Sigma \nabla^{y_h}_{x_h} \ldots \nabla^{y_{i-1}}_{x_{i-1}} \int dx_i \, \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} \ldots \daleth^{x''_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{y_k}_{y_k} u z''_\rho$$
$$- \Sigma \nabla^{y_h}_{x_h} \ldots \nabla^{y_{i-1}}_{x_{i-1}} \int dx_i \, \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} \ldots \daleth^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{y_k}_{x_k} u z'_\rho$$

dans laquelle Σ indique qu'il faut prendre la somme des termes que l'on peut trouver, en prenant successivement le nombre i_{+1}, $i_{+2} \ldots k$, pour valeur de ρ.

Si, dans cette dernière formule, on remplace u par $u\,\theta$, on en déduira la suivante :

$$(57)\quad \nabla_{x_h}^{y_h} \cdots \nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \int dx_i \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots \nabla_{x_k}^{y_k} u \frac{d\theta}{dx_i} = - \nabla_{x_h}^{y_h} \cdots \nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \int dx\, \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots \nabla_{x_k}^{y_k} \frac{du}{dx_i}\,\theta$$

$$+ \nabla_{x_h}^{y_h} \cdots \nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \daleth_{x_i}^{x''_i} \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots \nabla_{x_k}^{y_k} u\;\theta$$

$$- \nabla_{x_h}^{y_h} \cdots \nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \daleth_{x_i}^{x'_i} \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots \nabla_{x_k}^{y_k} u\;\theta$$

$$- \Sigma\, \nabla_{x_h}^{y_h} \cdots \nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \int dx_i \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots \nabla_{x_\rho}^{y_\rho} \cdots \nabla_{x_k}^{y_k} \frac{du}{dx_\rho}\,\theta\, z_\rho$$

$$- \Sigma\, \nabla_{x_h}^{y_h} \cdots \nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \int dx_i \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots \nabla_{x_\rho}^{y_\rho} \cdots \nabla_{x_k}^{y_k} u \frac{d\theta}{dx_\rho}\, z_\rho$$

$$- \Sigma\, \nabla_{x_h}^{y_h} \cdots \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i-1}} \int dx_i \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots \nabla_{x_\rho}^{y_\rho} \cdots \nabla_{x_k}^{y_k} u\;\theta\;z''_\rho$$

$$- \Sigma\, \nabla_{x_h}^{y_h} \cdots \nabla_{x_{i+1}}^{x_{i+1}} \int dx_i \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots \nabla_{x_\rho}^{y_\rho} \cdots \nabla_{x_k}^{y_k} u\;\theta\;z'_\rho$$

Cette dernière formule renferme comme cas particulier les différentes formules contenues dans les articles précédents de ce même paragraphe. Elle sera de peu d'utilité dans les applications; par contre, elle nous paraît indispensable pour la démonstration des règles de notre troisième chapitre.

6.

35. Nous avons encore à trouver sous quelles conditions il peut être permis d'intervertir des signes de substitution, tel que $\daleth_{x_\rho}^{y_\rho}$, soit entre eux, soit avec des signes d'intégration.

Soit donc pour un moment $F\,(x_\mu, x_\rho)$ une fonction quelconque de x_μ, x_ρ, et s'il y a lieu des autres variables indépendantes; nous supposons d'ailleurs $\rho > \mu$. Cela posé :

D'après les conventions de l'article 5, nous aurons :

$$\daleth_{x_\rho}^{x_\rho} F(x_\mu, x_\rho) = F(x_\mu, y_\rho),$$

et, par suite (article 14),

$$1_{x_\mu}^{y_\mu}\, 1_{x_\rho}^{y_\rho}\; F(x_\mu,\; x_\rho) = F(y_\mu,\; 1_{x_\mu}^{y_\mu}\, y_\rho).$$

Un nouveau calcul semblable au précédent nous donnerait :

$$1_{x_\rho}^{q}\, 1_{x_\mu}^{y_\mu}\; F(x_\mu,\; x_\rho) = F\left(1_{x_\rho}^{q}\, y_\mu,\; q\right).$$

Mais comme nous avons supposé μ moindre que ρ, la fonction y_μ doit être indépendante, et par suite nous devons avoir (article 5) :

$$1_{x_\rho}^{q}\, y_\mu = y_\mu.$$

Dès lors le dernier résultat se réduit à

$$1_{x_\rho}^{q}\, 1_{x_\mu}^{x_\mu}\, F(x_\mu,\, x_\rho) = F(y_\mu,\; q).$$

Si donc on veut que ce dernier résultat soit égal à celui des premières substitutions, il suffira de prendre q de telle manière que

(58) $$q = 1_{x_\mu}^{y_\mu}\, y_\rho,$$

et moyennant cette condition il viendra

$$1_{x_\rho}^{q}\, 1_{x_\mu}^{y_\mu}\; F(x_\mu,\; x_\rho) = 1_{x_\mu}^{y_\mu}\, 1_{x_\rho}^{x_\rho}\; F(x_\mu,\; x_\rho),$$

ou bien

(59) $$1_{x_\mu}^{y_\mu}\, u = 1_{x_\mu}^{y_\mu}\, 1_{x_\rho}^{y_\rho}\, u$$

36. Après cela faisons pour abréger :

$$\frac{d\,F(y_\mu,\; x_\rho)}{dx_\rho} = \psi(x_\mu,\; x_\rho)$$

alors, en observant que y_μ est indépendante de x_ρ, nous aurons :

$$\frac{d\,F(y_\mu,\; x_\rho)}{dx_\rho} = \psi(y_\mu,\; x_\rho)$$

Multiplions les deux membres de ces deux équations par dx_ρ et intégrons dans la première depuis $x_\rho = x'_\rho$ jusqu'à $x_\rho = x''_\rho$, dans la seconde depuis $x_\rho = q'$ jusqu'à q; cela nous donnera,

$$F(x_\mu, x''_\rho) - F(x_\mu, x'_\rho) = \int \psi(x_\mu, x_\rho)\, dx_\rho$$

$$F(y_\mu, q'') - F(y_\mu, q') = \int_{q'}^{q''} \psi(y_\mu, x_\rho)\, dx_\rho$$

et comme l'on a identiquement (article 14)

$$\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \left(F(x_\mu, x''_\rho) - F(x_\mu, x'_\rho)\right) = F\left(y_\mu, \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} x''_\rho\right) - F\left(y_\mu, \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} x'_\rho\right),$$

on voit que, si l'on prend

(60) $$q' = \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} x'_\rho, \; q'' = \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} x''_\rho,$$

l'on aura en même temps

$$\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \int \psi(x_\mu, x_\rho)\, dx_\rho = \int_{q'}^{q''} \psi(y_\mu, x_\rho)\, dx_\rho,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \int \psi(x_\mu, x_\rho)\, dx_\rho = \int_{q'}^{q''} dx_\rho\, \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \varphi(x_\mu, x_\rho)\, u,$$

ou bien sous la forme

(61) $$\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \int u\, dx_\rho = \int_{q'}^{q''} dx_\rho\, \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} u.$$

Toutefois, on ne devra pas perdre de vue que cela n'a lieu qu'autant que les limites auxiliaires q', q'' sont déterminées au moyen des équations ci-dessus :

(60) $$q' = \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} x'_\rho, \; q'' = \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} x''_\rho.$$

37. En partant de la formule 61, et suivant une marche que nous avons déjà suivie dans plusieurs paragraphes, on trouvera que l'expression

$$\int dx_g \ldots \int dx_{h-1}\, \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \int dx_i \ldots \int dx_{k-1}\, \rceil_{x_k}^{y_k} \ldots \rceil_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} \int dx_z \ldots \int u\,dx_m$$

peut être remplacée par :

$$(62) \int_{x'''_g}^{x^{IV}_g} dx_g \ldots \int_{x'''_{h-1}}^{x^{IV}_{h-1}} dx_{h-1} \int_{x'''_i}^{x^{IV}_i} dx_i \ldots \int_{x'''_{k-1}}^{x^{IV}_{k-1}} dx_k \int_{x'''_z}^{x^{IV}_z} dx_z \ldots \int_{x'''_m}^{x^{IV}_m} dx_m\, \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \rceil_{x_k}^{y_k} \ldots \rceil_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} u$$

pourvu que l'on détermine les limites auxiliaires qui entrent dans cette dernière expression, au moyen des équations :

$$\begin{array}{ll}
x'''_g = x'_g, & x^{IV}_g = x''_g, \\
x'''_{g+1} = x'_{g+1}, & x^{IV}_{g+1} = x''_{g+1}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
x'''_{h-1} = u'_{h-1}; & x^{IV}_{h-1} = x''_{h-1}; \\
x'''_i = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} x'_i, & x^{IV}_i = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} x''_i, \\
x'''_{i+1} = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} x'_{i+1}, & x^{IV}_{i+1} = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} x''_{i+1}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
x'''_{k-1} = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} x'_{k-1}; & x^{IV}_{k-1} = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \rceil_{x_k}^{y_k} \ldots\ x''_{k-1}; \\
x'''_z = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \rceil_{x_k}^{y_k} \ldots \rceil_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} x'_z & x^{IV}_z\ \ \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \rceil_{x_k}^{y_k} \ldots \rceil_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} x''_z, \\
x'''_{z+1} = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \rceil_{x_k}^{y_k} \ldots \rceil_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} x'_{z+1} & x^{IV}_{z+1} = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \rceil_{x_k}^{y_k} \ldots \rceil_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} x''_{z+1}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
x'''_m = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \rceil_{x_k}^{y_k} \ldots \rceil_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} x'_m & x^{IV}_m = \rceil_{x_h}^{y_h} \ldots \rceil_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} \rceil_{x_k}^{y_k} \ldots \rceil_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} x''_m.
\end{array}$$

On pourra transformer d'une manière analogue toute expression qui renfermera des signes de substitution, tels que $\rceil_{x_\rho}^{y_\rho}$, $\rceil_{x_{\rho'}}^{y_{\rho'}}$, $\rceil_{x_{\rho''}}^{y_{\rho''}}$, ... entremêlés de signes d'intégration; comme cette extension ne présente aucune difficulté, nous ne croyons pas devoir nous en occuper, et nous passerons à d'autres recherches.

7.

38. Nous avons encore à faire connaître quelques moyens de simplification qui sont applicables dans un grand nombre de circonstances.

D'abord, les formules (articles 35 et 36)

$$\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} u = \daleth_{x_q}^{y_q} \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} u$$

$$\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \int u dx_\rho = \int_{q'}^{q''} dx_\rho \, \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} u$$

montrent que les deux expressions

$$\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} u \text{ et } \daleth_{x_\alpha}^{y_\mu} \int u dx_\rho$$

sont nulles l'une et l'autre toutes les fois que $\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} u$ est ellemême égale à zéro.

Mais nous avons identiquement

$$\nabla_{x_\rho}^{y_\rho} u = \alpha_\rho \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} u + \beta_\rho \int u dx_\rho$$

et par suite

$$\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \nabla_{x_\rho}^{y_\rho} u = \alpha_\rho \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} u + \beta_\rho \daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \int u dx_\rho.$$

Nous pouvons donc en conclure que l'on aura encore

(63) $$\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} \nabla_{x_\rho}^{y_\rho} u = 0,$$

si l'on a

(64) $$\daleth_{x_\mu}^{y_\mu} u = 0.$$

39. D'après ce que nous venons de voir, l'expression

$$\daleth_{x_z}^{y_z} \nabla_{x_{z+1}}^{y_{z+1}} \nabla_{x_{z+2}}^{y_{z+2}} \cdots \nabla_{x_m}^{y_m} u,$$

sera nulle si

$$\daleth^{y_z}_{x_z} \nabla^{y_z+2}_{x_z+2} \nabla^{y_z+2}_{x_z+3} \ldots \nabla^{y_m}_{x_m} u$$

est elle-même égale à zéro; ce qui aura lieu si

$$\daleth^{y_z}_{x_z} \nabla^{y_z+3}_{x_z+3} \ldots \nabla^{y_m}_{x_m} u,$$

est elle-même égale à zéro : et ainsi de suite, nous pouvons donc en conclure que si

$$\daleth^{y_z}_{x_z} u = 0,$$

l'on doit avoir

(65) $$\daleth^{y_z}_{x_z} \nabla^{y_z+1}_{x_z+1} \nabla^{y_z+3}_{x_z+2} \ldots \nabla^{y_m}_{x_m} u = 0,$$

et plus généralement

(66) $$\nabla^{y_k}_{x_k} \ldots \nabla^{y_z-1}_{x_z-1} \daleth^{y_z}_{x_z} \nabla^{y_z+1}_{x_z+1} \ldots \nabla^{y_m}_{x_m} u = 0.$$

40. Nous savons (article 14) que

$$\daleth^{y_z}_{x_z} uv = \daleth^{y_z}_{x_z} u \,.\, \daleth^{y_z}_{x_z} v.$$

(67) Si donc on a

$$\daleth^{y_z}_{x_z} v = 0,$$

on aura aussi

$$\daleth^{y_z}_{x_z} uv = 0,$$

et par suite, d'après les deux formules du dernier article,

(68) $$\daleth^{y_z}_{x_z} \nabla^{y_z+1}_{x_z+1} \ldots \nabla^{y_m}_{x_m} uv = 0,$$

(69) $$\nabla^{y_k}_{x_k} \ldots \nabla^{y_z-1}_{x_z-1} \daleth^{y_z}_{x_z} \nabla^{y_z+1}_{x_z+1} \ldots \nabla^{y_m}_{x_m} uv = 0.$$

41. En observant que y_z ne renferme pas la variable x_z, nous aurons identiquement

$$\daleth^{y_z}_{x_z}(\mathrm{F}x_z - \mathrm{F}y_z) = \mathrm{F}y_z - \mathrm{F}y_z = 0,$$

ou bien

$$\daleth^{y_z}_{x_z}\left(p - \daleth^{y_z}_{x_z}p\right) = 0.$$

Si donc on pose

$$p = \daleth^{y_z}_{x_z}p + v,$$

il viendra

$$\daleth^{y_z}_{x_z}v = 0\,;$$

mais d'un autre côté, en remplaçant p par $\daleth^{y_z}_{x_z}p + v$ dans l'expression

$$\nabla^{y_k}_{x_k}\ldots\nabla^{y_z-1}_{x_z-1}\daleth^{y_z}_{x_z}\nabla^{y_z+1}_{x_z+1}\ldots\nabla^{y_m}_{x_m}up,$$

elle se change en

$$\nabla^{y_k}_{x_k}\ldots\nabla^{y_z-1}_{x_z-1}\daleth^{y_z}_{x_z}\nabla^{y_z+1}_{x_z+1}\ldots\nabla^{y_m}_{x_m}\left(u\daleth^{y_z}_{x_z}p\right)$$
$$+\nabla^{y_k}_{x_k}\ldots\nabla^{y_z-1}_{x_z-1}\daleth^{y_z}_{x_z}\nabla^{y_z+1}_{x_z+1}\ldots\nabla^{y_m}_{x_m}uv,$$

dont la seconde partie est nulle, puisque $\daleth^{y_z}_{x_z}v = 0$ (formule 69). Nous aurons donc identiquement

(70) $$\nabla^{y_k}_{x_k}\ldots\nabla^{y_z-1}_{x_z-1}\daleth^{y_z}_{x_z}\nabla^{y_z+1}_{x_z+1}\ldots\nabla^{y_m}_{x_m}up = {}^{y_k}_{x_k}\ldots\nabla^{y_z-1}_{x_z-1}\daleth^{y_z}_{x_z}\nabla^{y_z+1}_{x_z+1}\ldots\nabla^{y_m}_{x_m}\left(u\daleth^{y_z}_{x_k}p\right).$$

42. Nous conclurons de cette dernière formule que si deux fonctions p, q, donnent

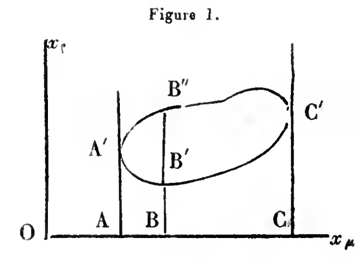
(71) $$\daleth^{y_z}_{x_z}p = \daleth^{y_z}_{x_z}q,$$

elles donneront encore

$$(72)\quad \nabla^{y_k}_{x_k}\ldots\nabla^{y_{\iota-1}}_{x_{\iota-1}}\daleth^{y_\iota}_{x_\iota}\nabla^{y_{\iota+1}}_{x_{\iota+1}}\ldots\nabla^{y_m}_{x_m}up=\nabla^{y_k}_{x_k}\ldots\nabla^{y_{\iota-1}}_{x_{\iota-1}}\daleth^{y_\iota}_{x_\iota}\nabla^{y_{\iota+1}}_{x_{\iota+1}}\ldots\nabla^{y_m}_{x_m}uq.$$

43. Pour un moment, nous regarderons comme constantes les différentes variables indépendantes autres que x_μ et x_ρ, et nous comparerons ces dernières aux coordonnées orthogonales des différents points qui peuvent être renfermés dans une certaine courbe rentrante; alors, en supposant l'indice $\rho > \mu$, les cordes de cette courbe, parallèles à l'axe de x_ρ, auront pour valeur la différence $x''_\rho - x'_\rho$. Cela posé :

Figure 1.



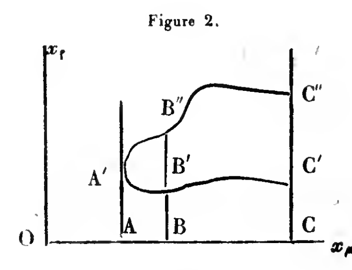
Ordinairement les coordonnées extrêmes AA′, CC′, seront tangentes à la courbe : on aura donc alors (fig. 1)

$$\text{pour } x_\mu = x'_\mu,\ x'_\rho = x''_\rho,$$
$$\text{pour } x_\mu = x''_\mu,\ x'_\rho = x''_\rho,$$

c'est-à-dire

$$\daleth^{x'_\mu}_{x_\mu} x'_\rho = \daleth^{x'_\mu}_{x_\mu} x''_\rho,\qquad \daleth^{x''_\mu}_{x_\mu} x'_\rho = \daleth^{x''_\mu}_{x_\mu} x''_\rho.$$

Figure 2.

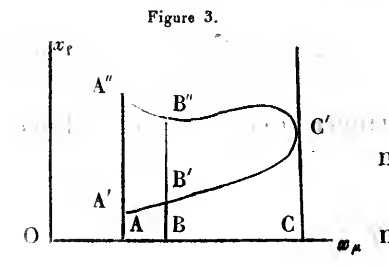


Parfois, cependant, il arrivera que la première ordonnée AA′ sera seule tangente à la courbe (fig. 2); alors on aura, comme dans le premier cas,

$$\daleth^{x'_\mu}_{x_\mu} x'_\rho = \daleth^{x'_\mu}_{x_\mu} x''_\rho;$$

mais l'autre égalité n'aura pas lieu.

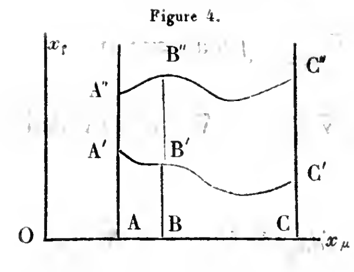
Figure 3.



D'autres fois, il arrivera que la dernière ordonnée CC′ sera seule tangente

à la courbe (fig. 3); alors on aura, comme dans le premier cas,

Figure 4.



$$\daleth_{x_\mu}^{x''_\mu} x'_\rho = \daleth_{x_\mu}^{x''_\mu} x''_\rho;$$

mais l'autre égalité du premier cas n'aura pas lieu.

Enfin, il pourra se faire que les deux ordonnées extrêmes ne touchent la courbe ni l'une ni l'autre, et qu'une partie de ces ordonnées soit nécessaire pour fermer cette courbe à chaque extrémité. Dans ce cas, aucune des relations précédentes n'aura lieu.

44. Maintenant, nous ferons observer que, d'après la formule 61 (article 36), on a

$$\daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} \int u dx_\rho = \int_{q'}^{q''} dx_\rho \, \daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} u,$$

pourvu que l'on prenne

$$q' = \daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} x'_\rho \qquad q'' = \daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} x''_\rho.$$

Nous en conclurons que, dans le premier et le second cas du dernier article, q' doit égaler q''; que, par suite, l'intégrale

$$\int_{q'}^{q''} dx_\rho \, \daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} u = 0;$$

et que, par conséquent,

$$(73) \qquad \daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} \int u dx_\rho = 0.$$

Après cela, nous comparerons ce dernier résultat avec la for-

mule 66 de l'article 39, et nous trouverons que, dans le premier et le second cas du dernier article, l'on doit avoir

$$\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\nabla^{y_{\mu}-1}_{x_{\mu}-1}\rceil^{x'_{\mu}}_{x_{\mu}}\nabla^{y_{\mu+1}}_{x_{\mu+1}}\ldots\nabla^{y_{\rho}-1}_{x_{\rho}-1}\int u dx_{\rho}=0,$$

et que par suite, en remplaçant u par $\nabla^{y_{\rho}+1}_{x_{\rho}+1}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u$, l'on doit avoir dans chacun de ces cas

$$(74)\quad \nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\nabla^{y_{\mu}-1}_{x_{\mu}-1}\rceil^{x'_{\mu}}_{x_{\mu}}\nabla^{y_{\mu}+1}_{x_{\mu}+1}\ldots\nabla^{y_{\rho}-1}_{x_{\rho}-1}\int dx_{\rho}\,\nabla^{y_{\rho}+1}_{x_{\rho}+1}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u=0.$$

45. Nous ferons observer encore que, d'après la même formule 66 (article 39), l'on a pareillement

$$\rceil^{x''_{\mu}}_{x_{\mu}}\int u dx_{\rho}=\int_{q'}^{q''}dx_{\rho}\,\rceil^{x''_{\mu}}_{x_{\mu}}u,$$

pourvu que l'on prenne

$$q'=\rceil^{x''_{\mu}}_{x_{\mu}}x'_{\rho}\qquad\qquad q''=\rceil^{x''_{\mu}}_{x_{\mu}}x''_{\rho};$$

nous partirons de là, et, par un raisonnement semblable à celui du dernier article, nous trouverons que, dans les premier et troisième cas de l'article 43, l'on doit avoir

$$(75)\quad \nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\nabla^{y_{\mu}-1}_{x_{\mu}-1}\rceil^{x''_{\mu}}_{x_{\mu}}\nabla^{y_{\mu}+1}_{x_{\mu}+1}\ldots\nabla^{y_{\rho}-1}_{x_{\rho}-1}\int dx_{\rho}\,\nabla^{y_{\rho}+1}_{x_{\rho}+1}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u=0.$$

46. Nous ferons observer encore que, d'après la formule 59 (article 35), l'on a

$$\rceil^{x'_{\mu}}_{x_{\mu}}\rceil^{x'_{\rho}}_{x_{\rho}}u=\rceil^{r'}_{x_{\rho}}\rceil^{x'_{\mu}}_{x_{\mu}}u,\quad \rceil^{x'_{\mu}}_{x_{\mu}}\rceil^{x''_{\rho}}_{x_{\rho}}u=\rceil^{r''}_{x_{\rho}}\rceil^{x'_{\mu}}_{x_{\mu}}u,$$

pourvu que l'on prenne

$$r'=\rceil^{x'_{\mu}}_{x_{\mu}}x'_{\rho}\ \text{et}\ r''=\rceil^{x'_{\mu}}_{x_{\mu}}x''_{\rho}.$$

Nous en conclurons que, dans le premier et le second cas de l'article 43, l'on doit avoir

$$(76) \qquad \daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} u = \daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} \daleth_{x_\rho}^{x''_\rho} u.$$

Après cela, nous comparerons ce résultat avec les formules 71 et 72 de l'article 40, et nous trouverons que l'on doit avoir, dans ce premier et ce second cas de l'article 43,

$$(77) \qquad \nabla_{x_i}^{y_i} \ldots \nabla_{x_{\mu-1}}^{y_{\mu-1}} \daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} \nabla_{x_{\mu+1}}^{y_{\mu+1}} \ldots \nabla_{x_{\rho-1}}^{y_{\rho-1}} \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \nabla_{x_{\rho+1}}^{y_{\rho+1}} \ldots \nabla_{x_k}^{y_k} u$$
$$= \nabla_{x_i}^{y_i} \ldots \nabla_{x_{\mu-1}}^{y_{\mu-1}} \daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} \nabla_{x_{\mu+1}}^{y_{\mu+1}} \ldots \nabla_{x_{\rho-1}}^{y_{\rho-1}} \daleth_{x_\rho}^{x''_\rho} \nabla_{x_{\rho+1}}^{y_{\rho+1}} \ldots \nabla_{x_k}^{y_k} u.$$

47. Par un raisonnement semblable, nous prouverions que, dans le premier et le troisième cas de l'article 43, on doit avoir d'abord

$$\daleth_{x_\mu}^{x''_\mu} \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} u = \daleth_{x_\mu}^{x''_\mu} {}_{x_\rho}^{x''_\rho} u,$$

et, par suite,

$$(78) \qquad \nabla_{x_i}^{y_i} \ldots \nabla_{x_{\mu-1}}^{y_{\mu-1}} \daleth_{x_\mu}^{x''_\mu} \nabla_{x_{\mu+1}}^{y_{\mu+1}} \ldots \nabla_{x_{\rho-1}}^{y_{\rho-1}} \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \nabla_{x_{\rho+1}}^{y_{\rho+1}} \ldots \nabla_{x_k}^{y_k} u$$
$$= \nabla_{x_i}^{y_i} \ldots \nabla_{x_{\mu-1}}^{y_{\mu-1}} \daleth_{x_\mu}^{x''_\mu} \nabla_{x_{\mu+1}}^{y_{\mu+1}} \ldots \nabla_{x_{\rho-1}}^{y_{\rho-1}} \daleth_{x_\rho}^{x''_\rho} \nabla_{x_{\rho+1}}^{y_{\rho+1}} \ldots \nabla_{x_k}^{y_k} u.$$

48. Nous pourrions appliquer les diverses simplifications dont nous venons de parler aux différentes formules que nous avions données auparavant; mais comme cela ne présente aucune difficulté, et que d'ailleurs nous n'en ferons aucun usage dans le travail qui nous occupe en ce moment, nous nous dispenserons d'écrire les résultats que l'on obtiendrait ainsi, et nous terminerons notre premier chapitre pour passer au calcul direct des variations.

CHAPITRE II.

I.

49. Dans ce chapitre, nous conserverons les différentes notations du premier, mais avec les modifications suivantes :

1° Le paramètre t ne sera plus un de ceux qui peuvent entrer dans les diverses fonctions qui appartiennent à la question que l'on veut résoudre; ce sera un paramètre auxiliaire tout à fait indépendant des premiers, et qui n'entrera que dans certaines fonctions auxiliaires dont nous parlerons dans un moment.

2° Les diverses quantités constantes ou variables qui appartiennent à la question que l'on veut résoudre seront *exclusivement* désignées par des lettres minuscules, comme

$$a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots\ldots$$

affectées, s'il le faut, d'accents ou d'indices.

3° Quant aux lettres majuscules, comme

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R},$$

soit simples, soit affectées d'indices ou d'accents, elles seront *exclusivement* réservées pour désigner des fonctions auxiliaires qui devront être telles, qu'en faisant $t = 0$, il vienne identiquement

$$\mathrm{A} = a, \quad \mathrm{B} = b, \quad \mathrm{C} = c, \ldots \mathrm{P} = p, \quad \mathrm{Q} = q, \quad \mathrm{R} = r, \ldots\ldots$$

et qui, de plus, devront encore être telles que si, par la nature de la question que l'on veut résoudre, certaines relations con-

nues doivent exister entre les diverses quantités primitives $a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots$, les mêmes relations devront avoir encore lieu entre les auxiliaires correspondantes A, B, C, ... P, Q, R, ..., ainsi que nous allons l'expliquer dans les articles suivants.

50. Les variables $X, X_1, X_2, \ldots X_n$, devront se réduire respectivement à $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, quand on fera $t = 0$; à cela près, elles devront être supposées aussi générales que la question proposée pourra le permettre. D'ailleurs, quand il s'agira des autres auxiliaires, *elles devront jouer le rôle de variables indépendantes.*

51. Les paramètres $a, b, c, \ldots$ étant indépendants de $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, les paramètres auxiliaires correspondants A, B, C, ... devront pareillement être indépendants de $X, X_1, X_2, \ldots X_n$.

52. Si, par cas, une des fonctions primitives p est telle que l'on ait

$$p = f(a, b, c, \ldots x, x_1, x_2, \ldots x_n),$$

on devra prendre

$$P = f(A, B, C, \ldots X, X_1, X_2, \ldots X_n) + \varphi(t, X, X_1, X_2, \ldots X_n),$$

en désignant par $\varphi(t, X, X_1, X_2, \ldots X_n)$ une fonction telle, qu'en faisant $t = 0$ il vienne identiquement

$$\varphi(0, x, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0.$$

53. Si, par cas, une fonction d'une forme connue u renferme déjà une ou plusieurs fonctions de $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, comme, par exemple,

$$u = F(a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots x, x_1, x_2, \ldots x_n),$$

on devra prendre

$$U = F(A, B, C, \ldots P, Q, R, \ldots X, X_1, X_2, \ldots X_n).$$

54. Si, par cas, l'on a

$$v = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots}u}{dx^{\mu}\,dx_1^{\mu'}\,dx_2^{\mu''}\cdots}$$

on devra prendre

$$V = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots}U}{dX^{\mu}\,dX_1^{\mu'}\,dX_2^{\mu''}\cdots}$$

55. Si, par cas, l'on a

$$w = \int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots . \int u dx_n$$

on devra prendre

$$W = \int_{X'}^{X''} dX \int_{X'_1}^{X''_1} dX_1 \int_{X'_2}^{X''_2} dX_2 \ldots . \int_{X'_n}^{X''_n} U dX_n;$$

d'ailleurs, l'auxiliaire W devra être une fonction définie comme w, ce qui exige que

Les limites X'_n et X''_n de X_n soient des fonctions de t, X, X_1, X_2, ... X_{n-1}, mais indépendantes de X_n;

Que les limites X'_{n-1}, X''_{n-1} de X_{n-1}, soient des fonctions de t, X, X_1, X_2... X_{n-2}, mais indépendantes de X_{n-1} X_n;

Et ainsi de suite jusqu'aux limites X' et X'' de X, qui devront être des fonctions de t, mais indépendantes des variables X, X_1, X_2... X_n.

56. Si, par cas, l'on avait

$$u = \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int v dx_k,$$

on devrait prendre

$$U = \int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} V dx_k;$$

les limites

$$X'_i, X''_i, X'_{i+1}, X''_{i+1}, \ldots X'_k, X''_k,$$

étant les mêmes que dans le dernier article.

57. De même encore, si l'on avait

$$u = 7_{x_i}^{y_i} 7_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \ldots 7_{x_k}^{y_k} v,$$

on devrait prendre

$$U = 7_{X_i}^{Y_i} 7_{X_{i+1}}^{Y_{i+1}} \ldots 7_{X_k}^{Y_k} V$$

en déterminant les auxiliaires Y_i, Y_{i+1}, $Y_{i+2}, \ldots Y_k$, d'après les règles précédentes.

Et ainsi de suite, quelle que puisse être la fonction auxiliaire que l'on puisse avoir à former. D'ailleurs, à part les restrictions que nous venons de signaler, les fonctions auxiliaires devront être supposées aussi générales que la question pourra le permettre.

2.

58. Maintenant, supposons pour un moment que W exprime une quelconque des fonctions auxiliaires dont nous venons de parler; supposons encore que l'on calcule les dérivées.

$$\frac{dW}{dt}, \frac{d^2W}{dt^2}, \frac{d^3W}{dt^3}, \ldots$$

En faisant varier tout ce qui peut dépendre de t; supposons, enfin, que dans les résultats obtenus on fasse $t = 0$. On trouvera ainsi des valeurs particulières de ces résultats, que nous désignerons respectivement par

$$\delta w, \delta^2 w, \delta^3 w, \ldots .$$

et auxquelles nous donnerons le nom de *variations* du 1er, du 2e, du 3e, ... ordre de la fonction w.

59. Supposons, en second lieu, que l'on calcule les dérivées

$$\frac{dW}{dt},\ \frac{d^2W}{dt^2},\ \frac{d^3W}{dt^3},\ \ldots$$

En traitant celles des variables X, X_1, X_2 ... X_n, qui peuvent entrer dans la fonction W, comme si elles étaient indépendantes du paramètre auxiliaire t; supposons encore qu'après avoir calculé les résultats, on fasse de nouveau $t = 0$: on parviendra ainsi à des espèces de *variations tronquées* que nous désignerons respectivement par

$$\bar{\delta} w,\ \bar{\delta}^2 w,\ \bar{\delta}^3 w,\ \ldots.$$

C'est-à-dire en couronnant d'un trait la caractéristique ordinaire des variations.

Il va, d'ailleurs, sans dire que les signes δ et $\bar{\delta}$ sont de simples caractéristiques indépendantes de la nature de la fonction w.

60. Quelle que puisse être la fonction W que nous venons de considérer, si l'on effectuait les diverses opérations de calcul nécessaires pour parvenir à sa valeur sous forme explicite, elle se réduirait à une fonction ordinaire de t, X, X_1, X_2... X_n, et l'on aurait identiquement

$$\frac{dW}{dt} = \left(\frac{dW}{dt}\right) + \frac{dW}{dX}\frac{dX}{dt} + \frac{dW}{dX_1}\frac{dX_1}{dt} + \ldots + \frac{dW}{dX_n}\frac{dX_n}{dt},$$

en désignant par $\left(\frac{dW}{dt}\right)$ la dérivée de W par rapport à t, calculée comme si X, X_1, X_2 .. X_n ne dépendaient point de ce paramètre.

Maintenant, si l'on fait $t = 0$, les dérivées

$$\frac{dW}{dt},\ \frac{dX}{dt},\ \frac{dX_1}{dt},\ \ldots\ \frac{dX_n}{dt},$$

se réduiront respectivement à

$$\delta w,\ \delta x,\ \delta x_1, \ldots \delta x_n,$$

les dérivées partielles

$$\left(\frac{dW}{dt}\right),\ \frac{dW}{dx},\ \frac{dW}{dx_1}, \ldots \frac{dW}{dX_n},$$

se réduiront respectivement à

$$\bar{\delta} w,\ \frac{dw}{dx},\ \frac{dw}{dx_1}, \ldots \frac{dw}{dx_n}:$$

nous devrons donc avoir

$$(1) \qquad \delta w = \bar{\delta} w + \frac{dw}{dx}\delta x + \frac{dw}{dx_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{dw}{dx_n}\delta x_n.$$

61. On voit par notre dernière formule que tout se réduit au calcul des variations tronquées. C'est donc de ces dernières que nous allons nous occuper; mais auparavant nous ferons observer que si une fonction quelconque y_ρ ne doit pas dépendre des variables x_ρ, $x_{\rho+1}$, $x_{\rho+2} \ldots x_n$, l'on aura identiquement

$$(2) \quad \delta y_\rho = \bar{\delta} y_\rho + \frac{dy_\rho}{dx}\delta x + \frac{dy_\rho}{dx_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{dy_\rho}{dx_{\rho-1}}\delta x_{\rho-1},$$

puisque les dérivées suivantes :

$$\frac{dy_\rho}{dx_\rho},\ \frac{dy_{\rho+1}}{dx_{\rho+1}}, \ldots \frac{dy_\rho}{dx_n},$$

seront nulles.

De même, si w est une *expression définie,* c'est-à-dire une expression telle qu'elle ne dépend plus des valeurs intermédiaires des variables indépendantes, comme sont, par exemple, les intégrales définies, l'on aura identiquement

$$(3) \qquad \delta w = \bar{\delta} w.$$

puisque, dans ce cas, les dérivées

$$\frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dx_1}, \frac{dw}{dx_2}, \ldots \frac{dw}{dx_n},$$

sont identiquement nulles.

3.

62. Pour commencer le développement du calcul des variations tronquées, nous supposerons que l'on a

$$u = F(a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots x, x_1, x_2, \ldots x_n);$$

alors on devra prendre (article 53)

$$U = F(A, B, C, \ldots P, Q, R, \ldots X, X_1, X_2, \ldots X_n):$$

dès lors, en différentiant comme si $X, X_1, X_2 \ldots X_n$ ne dépendaient point de t, nous aurons

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dA}\frac{dA}{dt} + \frac{dU}{dB}\frac{dB}{dt} + \frac{dU}{dC}\frac{dC}{dt} + \ldots$$
$$+ \frac{dU}{dP}\frac{dP}{dt} + \frac{dU}{dQ}\frac{dQ}{dt} + \frac{dU}{dR}\frac{dR}{dt} + \ldots$$

et par suite, en faisant $t = 0$, il viendra

$$(4) \qquad \bar{\delta} u = \frac{du}{da}\bar{\delta} a + \frac{du}{db}\bar{\delta} b + \frac{du}{dc}\bar{\delta} c + \ldots$$
$$+ \frac{du}{dp}\bar{\delta} p + \frac{du}{dq}\bar{\delta} q + \frac{du}{dr}\bar{\delta} r + \ldots$$

63. Supposons, en second lieu, que l'on ait

$$v = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots} p}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''} \ldots};$$

dans ce cas, on devra prendre (article 54)

$$V = \frac{d^{\mu + \mu' + \mu'' + \cdots} P}{dX^{\mu}\, dX_1^{\mu'}\, dX_2^{\mu''} \ldots};$$

par suite, en différentiant par rapport à t comme si X, X_1, X_2,... X_n ne dépendaient point de ce paramètre, l'on aura

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\frac{d^{\mu + \mu' + \mu'' + \cdots} P}{dX^{\mu}\, dX_1^{\mu'} + dX_2^{\mu''} \cdots}}{dt} = \frac{d^{\mu + \mu' + \mu'' + \cdots} \frac{dP}{dt}}{dX^{\mu}\, dX_1^{\mu'}\, dX_2^{\mu''} \ldots};$$

et par conséquent, en faisant $t = 0$, il viendra

$$(5) \qquad \bar{\delta} v = \frac{d^{\mu + \mu' + \mu'' \cdots + } \bar{\delta} p}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu''}\, dx_2^{\mu''} \ldots}.$$

64. Supposons encore que l'on ait

$$v = \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots \int u dx_k;$$

dans ce cas, on devra prendre

$$V = \int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} U dX_k.$$

Dès lors, en différentiant, par rapport à t, comme si X, X_1, X_2.. X_n, ne dépendaient point de ce paramètre, on trouvera par un calcul semblable à celui du paragraphe 2, chapitre II:

$$\frac{dV}{dt} = \int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{+1}} dX_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k \frac{dU}{dt}$$
$$+ \int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots 7_{X_k}^{X''_k} U \frac{dX''_k}{dt}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1}\, \urcorner_{X_{i+2}}^{X''_{i+2}} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX''_{i+2}}{dt} \\
&+\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i\, \urcorner_{X_{i+1}}^{X''_{i+1}} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX''_{i+2}}{dt} \\
&+\urcorner_{X_i}^{X''_i} \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX''_1}{dt} \\
&-\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots\ldots \urcorner_{X_k}^{X'_k}\, U\, \frac{dX'_k}{dt} \\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&-\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1}\, \urcorner_{X_{i+2}}^{X'_{i+2}} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX'_{i+2}}{dt} \\
&-\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i\, \urcorner_{X_{i+1}}^{X'_{i+1}} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX'_{i+1}}{dt} \\
&-\urcorner_{X_i}^{X'_i} \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX'_i}{dt}
\end{aligned}
$$

et en faisant $t = 0$, il viendra

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad \bar{\delta} v = &\int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots \int dx_k\, \bar{\delta} u \\
&+ \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots \urcorner_{x_k}^{x''_k}\, u\, \bar{\delta} x''_k \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \int dx_i \int dx_{i+1}\, \urcorner_{x_{i+2}}^{x''_{i+2}} \ldots \int dx_k\, u\, \bar{\delta} x''_{i+2} \\
&+ \int dx_i\, \urcorner_{x_{i+1}}^{x''_{i+1}} \int dx_{i+2} \ldots \int dx_k\, u\, \bar{\delta} x''_{i+1} \\
&+ \urcorner_{x_i}^{x''_i} \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots \int dx_k\, u\, \bar{\delta} x''_i \\
&- \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots \urcorner_{x_k}^{x'_k}\, u\, \bar{\delta} x'_k \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$- \int dx_i \int dx_{i+1} \urcorner_{x_{i+2}}^{x'_{i+2}} \ldots \int dx_k \, u \, \bar{\delta} \, x'_{i+2}$$

$$- \int dx_i \urcorner_{x_{i+1}}^{x'_{i+1}} \int dx_{i+2} \ldots \int dx_k \, u \, \bar{\delta} \, x'_{i+1}$$

$$- \urcorner_{x_i}^{x'_i} \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots \int dx_k \, u \, \bar{\delta} \, x'_i.$$

65. En général, soit w une quelconque des fonctions qui entrent dans la question que l'on veut résoudre; soit W la fonction auxiliaire correspondante. Cela posé,

Supposons que, d'un côté, l'on calcule $\frac{dW}{dt}$, en traitant les variables X, X_1, $X_2 \ldots X_n$, comme si elles étaient indépendantes de t, et que, d'un autre côté, l'on calcule $\frac{dw}{dt}$, en traitant les diverses fonctions d qui peuvent entrer dans w comme si elles dépendaient de t.

Les deux résultats obtenus seront évidemment semblables et ne différeront l'un de l'autre que par la dimension des lettres. Lors donc que l'on fera $t = 0$, le premier ne différera du second qu'en ce que la caractéristique $\bar{\delta}$ remplacera la différentiation relative à t : de là résulte cette règle générale.

Pour trouver la variation tronquée d'une fonction quelconque w, on la différentiera, par rapport à t, comme si les quantités passibles de *variation* étaient des fonctions de ce paramètre; après cela, on changera les dérivées relatives à t en variations tronquées analogues.

66. Il est facile de vérifier la règle précédente sur chacun des exemples que nous venons de donner dans les articles précédents. Nous nous bornerons à l'appliquer à l'expression

$$\nabla_{x_i}^{y_i} \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \nabla_{x_{i+2}}^{y_{i+2}} \ldots \nabla_{x_k}^{y_k} u;$$

mais en supposant les α_i, β_i, α_{i+1}, $\beta_{i+1} \ldots \alpha_k$, β_k constantes, comme ne devant pas éprouver de variation.

Dans ce cas, la formule 51 du chapitre 1[er] nous donnera

$$(7)\quad \overline{\delta}\,\nabla^{y_i}_{x_i}\,\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u = \nabla^{y_i}_{x_i}\,\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,\overline{\delta}\,u$$
$$+\Sigma\,\alpha_i\,\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\daleth^{y_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u_{(\rho,k)}\,\overline{\delta}\,y_\rho$$
$$+\Sigma\,\beta_i\,\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\daleth^{x''_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u\quad\overline{\delta}\,x''_\rho$$
$$-\Sigma\,\beta_i\,\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\daleth^{x'_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}\,u\quad\overline{\delta}\,x'_\rho.$$

4.

66. Il nous reste à rapprocher nos formules de celles qui sont déjà connues pour les intégrales doubles et triples, d'après lesquelles on se trouve conduit à faire

$$(8)\quad \delta\int dx\int dx_1\ldots\int u dx_n = \int dx\int dx_1\ldots\int dx_n\left\{\delta\,u - \frac{du}{dx}\,\delta\,x - \frac{du}{dx_1}\,\delta\,x_1 - \ldots - \frac{du}{dx_n}\,\delta\,x_n\right\}$$
$$+\int dx\int dx_1\ldots\int dx_n\left\{\frac{d.u\,\delta x}{dx}+\frac{d.u\,\delta x_1}{dx_1}+\ldots\ldots\frac{d.u\,\delta x_n}{dx_n}\right\}.$$

67. D'abord, puisqu'il s'agit d'intégrales définies, nous aurons, d'après nos formules (article 61),

$$\delta\int dx\int dx_1\ldots\ldots\int u dx_n = \overline{\delta}\int dx\int dx_1\ldots\int u dx_n,$$

dont les econd membre, calculé au moyen de la formule 6 (article 64), nous donnera

$$(9)\quad \delta\int dx\int dx_1\ldots\int u dx_n = \int dx\int dx_1\int dx_2\ldots\int dx_n\,\overline{\delta}\,u$$
$$+\daleth^{x''}_{x}\int dx_1\int dx_2\ldots\ldots\int dx_n\,u\,\overline{\delta}\,x''$$
$$+\int dx\,\daleth^{x''_1}_{x_1}\int dx_2\ldots\ldots\int dx_n\,u\,\overline{\delta}\,x''_1$$
$$+\int dx\int dx_1\,\daleth^{x''_2}_{x_2}\ldots\ldots\int dx_n\,u\,\overline{\delta}\,x''_2$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\int dx\int dx_1\int dx_2\ldots\ldots\daleth^{x''_n}_{x_n}\,u\,\overline{\delta}\,x''_n$$

$$
\begin{aligned}
&- \urcorner_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_n \, u \, \bar{\delta} \, x' \\
&- \int dx \, \urcorner_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \ldots \int dx_n \, u \, \bar{\delta} \, x'_1 \\
&- \int dx_n \int dx_1 \, \urcorner_{x_2}^{x'_2} \ldots \int dx_n \, u \, \bar{\delta} \, x'_2 \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \urcorner_{x_n}^{x'_n} \, u \, \bar{\delta} \, x'_n.
\end{aligned}
$$

Il suffit de faire voir que la formule 8 peut être ramenée à cette dernière forme.

68. Pour cela, nous ferons observer qu'au moyen de la formule 54 du chapitre 1er on peut transformer un terme de la forme

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_\rho \ldots \int dx_n \frac{d_{\prime} u \, \delta \, x_\rho}{dx_\rho},$$

en

$$
\begin{aligned}
&\int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \urcorner_{x_\rho}^{x''_\rho} \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho \\
&- \int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \urcorner_{x_{\rho+1}}^{x''_{\rho+1}} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho . \frac{dx''_{\rho+1}}{dx} \\
&- \int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \urcorner_{x_{\rho+2}}^{x''_{\rho+2}} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho \frac{dx''_{\rho+2}}{dx_\rho} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \urcorner_{x_n}^{x''_n} u \, \delta x_\rho \frac{dx''_n}{dx_\rho} \\
&- \int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \urcorner_{x_\rho}^{x'_\rho} \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho \\
&+ \int dx \ldots \int dx_{\rho+1} \int dx_\rho \urcorner_{x_{\rho+1}}^{x'_{\rho+1}} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho \frac{dx'_{\rho+1}}{dx_\rho} \\
&+ \int dx \ldots \int dx_{\rho+1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} {}_{x_{\rho+2}}^{x'_{\rho+2}} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho \frac{dx'_{\rho+2}}{dx_\rho} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \int dx \ldots \int dx_{\rho+1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \urcorner_{x_n}^{x'_n} u \, \delta x_\rho \frac{dx'_n}{dx_\rho}
\end{aligned}
$$

En outre, d'après la formule 70 du chapitre 1er, la variation δx_ρ peut être remplacée dans ce terme

$$\int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \urcorner_{x_\rho}^{x''_\rho} \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho$$

par $\daleth_{x_\rho}^{x''_\rho}\,\delta x_\rho$, c'est-à-dire par $\delta x''_\rho$, variation de x''_ρ; et dans le terme

$$\int dx \ldots \int dx_{\rho-1}\, \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n \; u\;\delta x_\rho$$

par $\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}$, δx_ρ, c'est-à-dire par $\delta x'_\rho$ variation de x'_ρ.

C'est ce que nous supposerons dans l'article suivant.

69. Supposons maintenant que l'on transforme, comme nous venons de le dire, les différents terme du second membre de l'équation 8 qui peuvent donner lieu à de pareilles transformations, et que l'on groupe les résultats par rapport aux signes

$$\daleth_x^{x''},\ \daleth_{x_1}^{x''_1},\ \daleth_{x_2}^{x''_2},\ldots\ \daleth_{x_n}^{x''_n};\ \daleth_x^{x'}\ \daleth_{x_1}^{x'_1}\ \daleth_{x_2}^{x'_2}\ \ldots\ \daleth_{x_n}^{x'_n},$$

on trouvera que cette équation 8 se change en

$$
\begin{aligned}
(10)\quad \delta \int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int u\,dx_n = & \int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_n \left\{ \delta u - \frac{du}{dx}\,\delta x - \frac{du}{dx_1}\,\delta x_1 - \ldots\ldots \frac{du}{dx_n}\,\delta x_n \right\} \\
& + \daleth_x^{x''} \int dx_1 \int dx_2 \ldots\ldots \int dx_n\, u \left\{ \delta x'' \right\} \\
& + \int dx\, \daleth_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \ldots\ldots \int dx_n\, u \left\{ \delta x''_1 - \frac{dx''_1}{dx}\,\delta x \right\} \\
& + \int dx \int dx_1\, \daleth_{x_2}^{x''_2} \ldots \int dx_n\, u \left\{ \delta x''_2 - \frac{dx''_2}{dx}\,\delta x - \frac{dx''_2}{dx_1}\,\delta x_1 \right\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \daleth_{x_n}^{x''_n}\ u \left\{ \delta x''_n - \frac{dx''_n}{dx}\,\delta x - \frac{dx''_n}{dx_1}\,\delta x_1 \right. \\
& \qquad\qquad \left. - \ldots \frac{dx''_n}{dx_{n-1}}\,\delta x_{n-1} \right\} \\
& - \daleth_x^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_n\, u \left\{ \delta x' \right\} \\
& - \int dx\, \daleth_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \ldots \int dx_n\, u \left\{ \delta x'_1 - \frac{dx'_1}{dx}\,\delta x \right\} \\
& - \int dx \int dx_1\, \daleth_{x_2}^{x'_2} \ldots \int dx_n\, u \left\{ \delta x'_2 - \frac{dx'_2}{dx}\,\delta x - \frac{dx'_2}{dx_1}\,\delta x_1 \right\} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - \int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots\ldots \daleth_{x_n}^{x'_n}\ u \left\{ \delta x'_n - \frac{dx'_n}{dx}\,\delta x - \frac{dx'_n}{dx_1}\,\delta x_1 \right. \\
& \qquad\qquad \left. - \ldots \frac{dx'_n}{dx_{n-1}}\,\delta x_{n-1} \right\}.
\end{aligned}
$$

70. Après cela, nous ferons observer que comme, quelle que soit la valeur de l'indice ρ, les limites x'_ρ, x''_ρ, ne dépendent point des variables x_ρ, $x_{\rho-1}$, ... x_n, l'on doit avoir identiquement (article 61) :

$$\delta x''_\rho = \overline{\delta} x''_\rho + \frac{dx''_\rho}{dx}\,\delta x + \frac{dx''_\rho}{dx_1}\,\delta x_\rho + .. + \frac{dx''_\rho}{dx_{\rho-1}}\,\delta x_{\rho-1},$$

$$\delta x'_\rho = \overline{\delta} x'_\rho + \frac{dx'_\rho}{dx}\,\delta x + \frac{dx'_\rho}{dx_1}\,\delta x_1 + .. + \frac{dx'_\rho}{dx_{\rho-1}}\,\delta x_{\rho-1},$$

tandis que (article 60)

$$\delta u = \overline{\delta} u + \frac{du}{dx}\,\delta x + \frac{du}{dx_1}\,\delta x_1 + \frac{du}{dx_2}\,\delta x_2 + \ldots + \frac{du}{dx_n}\,\delta x_n.$$

Nous substituerons donc ces valeurs dans le second membre de l'équation 10, et nous trouverons qu'il reproduit identiquement celui de l'équation 9 : ce qui suffit pour prouver l'équivalence de nos formules avec celles que l'on pourrait déduire de tout autre procédé.

CHAPITRE III.

1.

73. Dans ce nouveau chapitre, nous appliquerons le calcul des variations à la recherche des maxima et minima des intégrales définies multiples, et plus généralement encore des expressions définies relatives à un même système de limites; mais, avant de commencer, nous croyons devoir indiquer quelques modifications dans les conventions précédentes.

74. D'abord, nous n'aurons plus à considérer les fonctions auxiliaires, que dans le dernier chapitre nous avons exclusivement désignées par des lettres majuscules; dès lors nous pourrons employer ces dernières sans aucune acception distincte, et

c'est ce que nous ferons, suivant les besoins qui pourront se présenter.

75. Si dans l'équation identique

$$\nabla_{x_i}^{y_i} u = \alpha_i \, \daleth_{x_i}^{y_i} u + \beta_i \int u \, dx_i,$$

on remplace u par $\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u$, c'est-à-dire par $\alpha_{i+1} \daleth_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u + \beta_{i+1} \int u dx_{i+1}$, il viendra pour résultat

$$\nabla_{x_i}^{y_i} \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u = \alpha_i \alpha_{i+1} \daleth_{x_i}^{y_i} \daleth_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u + \alpha_i \beta_{i+1} \daleth_{x_i}^{y_i} \int u \, dx_{i+1} + \alpha_{i+1} \beta_i \int dx_i \daleth_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u + \beta_i \beta_{i+1} \int dx_i \int u dx_{i+1},$$

et en continuant d'une manière semblable, on verra que toute expression de la forme

$$\nabla_{x_i}^{y_i} \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \dots \nabla_{x_k}^{y_k} u$$

peut se ramener à une suite de termes *de même forme*, mais dans lesquels chacune des caractéristiques ∇ se trouvera réduite à un simple signe de substitution $\daleth$ ou à un signe d'intégration $\int$. Désormais, nous supposerons cette transformation effectuée. De cette manière, l'expression

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{y_2} u$$

représentera une des huit suivantes :

$$\int dx \int dx_1 \int u dx_2, \; \int dx \int dx_1 \daleth_{x_2}^{y_2} u, \; \int dx \daleth_{x_1}^{y_1} \int u dx_2, \; \daleth_x^y \int dx_1 \int u dx_2$$
$$\int dx \daleth_{x_1}^{y_1} \daleth_{x_2}^{y_2} u, \; \daleth_x^y \int dx_1 \daleth_{x_2}^{y_2} u, \; \daleth_x^y \daleth_{x_1}^{y_1} \int u dx_2, \; \daleth_x^y \daleth_{x_1}^{y_1} \daleth_{x_2}^{y_2} u.$$

76. Pour ne pas nous laisser entraîner à une généralité surabondante, nous supposerons que, quelle que soit la valeur de l'indice ρ, la fonction y_ρ *représente essentiellement* l'une ou l'autre des limites x'_ρ, x''_ρ.

77. Soit v une expression composée de termes définis, dont les uns soient de la forme

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{y_2} \dots \nabla_{x_n}^{y_n} u_n,$$

tandis que d'autres seront de la forme $(m < n)$

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{y_2} \dots \nabla_{x_m}^{y_m} u_m,$$

en désignant par u_m une fonction quelconque de x, x_1, $x_2 \dots x_m$, mais indépendante de x_{m+1}, $x_{m+2}, \dots x_n$. Dans ce cas, comme d'après la formule 24 (article 16), on a identiquement

$$u_m = \daleth_{x_{m+1}}^{y_{m+1}} \daleth_{x_{m+2}}^{y_{m+2}} \dots \daleth_{x_n}^{y_n} u_m;$$

nous remplacerons les termes de la dernière forme par d'autres termes, tels que

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{y_2} \dots \nabla_{x_m}^{y_m} \daleth_{x_{m+1}}^{y_{m+1}} \daleth_{x_{m+2}}^{y_{m+2}} \dots \daleth_{x_n}^{y_n} u_m.$$

De cette manière, tous les termes de v seront d'une forme analogue et leur comparaison sera plus facile; d'ailleurs, dans chacun de ces termes, les caractéristiques ∇ peuvent être différentes : elles doivent être seulement assujetties aux conditions de l'article 75.

2.

78. Supposons maintenant qu'une somme v de termes semblables à ceux dont nous venons de parler renferme une ou plusieurs fonctions inconnues, on peut demander quelles peuvent être les valeurs de ces inconnues pour que v devienne un maximum ou un minimum.

On sait que, dans ce cas, on doit avoir

$$\delta v = 0,$$

en laissant les variations des inconnues aussi arbitraires que les

conditions du problème peuvent le permettre; de telle sorte que, si les inconnues doivent satisfaire à des équations de condition

$$w = 0, \; w_1 = 0, \; w_2 = 0, \ldots$$

insuffisantes pour les déterminer, les variations de ces inconnues devront satisfaire aux équations de condition

$$\delta w = 0, \; \delta w_1 = 0, \; \delta w_2 = 0, \ldots$$

sans autre restriction quelconque.

79. Nous avons déjà vu (article 61) que lorsque v est une expression définie, on a identiquement

$$\delta v = \overline{\delta} v;$$

ainsi, l'équation aux variations

$$\delta v = 0$$

pourra être remplacée par

$$\overline{\delta} v = 0.$$

80. Si, par cas, le premier membre de l'équation de condition

$$w = 0$$

est aussi une expression définie, on pourra encore remplacer l'équation de condition

$$\delta w = 0$$

par l'équation aux variations tronquées

$$\overline{\delta} w = 0,$$

ce que l'on prouverait de la même manière que dans le dernier article.

Si w n'est pas une expression définie, et qu'elle renferme une ou plusieurs des variables indépendantes $x, x_1, x_2, .. x_n$, nous aurons alors (article 60)

$$\delta w = \overline{\delta} w + \frac{dw}{dx}\delta x + \frac{dw}{dx_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{dw}{dx_n}\delta x_n = 0;$$

mais l'équation $w = 0$ nous donnera encore identiquement

$$\frac{dw}{dx} = 0, \frac{dw}{dx_1} = 0, \frac{dw}{dx_2} = 0, \ldots \frac{dw}{dx_n} = 0,$$

et, par suite, l'équation de condition

$$\delta w = 0$$

se réduira encore à

$$\overline{\delta} w = 0.$$

81. Comme ce que nous venons de voir pour l'équation de condition $w = 0$ peut se répéter pour chacune des autres, nous en conclurons que,

Dans la recherche des maxima et minima des expressions définies, *il suffit d'avoir égard aux variations tronquées de ces expressions et des équations de condition qui peuvent lier les inconnues qui s'y trouvent renfermées.*

82. Après avoir formé les équations aux variations

$$\overline{\delta} v = 0, \overline{\delta} w = 0, \overline{\delta} w_1 = 0, \overline{\delta} w_2 = 0, \ldots$$

on aura recours à la méthode connue des multiplicateurs pour ramener la question à celle où l'on n'a qu'une seule équation aux variations, que nous désignerons par

$$V = 0,$$

et dans laquelle les variations de toutes les inconnues peuvent

être traitées comme indépendantes les unes des autres : c'est ce que nous supposerons déjà effectué.

83. Nous avons vu (article 66) que

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\,\nabla_{x}^{y}\,\nabla_{x_1}^{y_1}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}u = {} & \Sigma\,\nabla_{x}^{y}\,\nabla_{x_1}^{y_1}\ldots\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}\,\bar{\delta}u \\ & + \Sigma\,\nabla_{x}^{y}\,\nabla_{x_1}^{y_1}\ldots\urcorner_{x_\rho}^{y_\rho}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}\,u_{(\rho,\,n)}\,\bar{\delta}x_\rho \\ & + \Sigma\,\nabla_{x}^{y}\,\nabla_{x_1}^{y_1}\ldots\urcorner_{x_\rho}^{x''_\rho}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}\,u\,\bar{\delta}x''_\rho \\ & - \Sigma\,\nabla_{x}^{y}\,\nabla_{x_1}^{y_1}\ldots\urcorner_{x_\rho}^{x'_\rho}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}\,u\,\bar{\delta}x'_\rho.\end{aligned}$$

Lors donc que l'on aura développé, s'il y a lieu, la valeur de $\bar{\delta}u$, on aura pour résultat une somme de termes qui, sauf la différence de signification de caractéristiques ∇, seront de la forme

$$\nabla_{x}^{y}\,\nabla_{x_1}^{y_1}\,\nabla_{x_2}^{y_2}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}\,\Theta_n\,\theta_n,$$

en désignant par Θ une fonction donnée des inconnues et des variables indépendantes, et par θ, la variation tronquée de l'une des inconnues ou bien une dérivée différentielle d'une semblable variation.

De là et de la préparation indiquée dans l'article 77, nous conclurons que l'équation

$$V = 0$$

peut être regardée comme composée d'une somme de termes de la forme

$$\nabla_{x}^{y}\,\nabla_{x_1}^{y_1}\,\nabla_{x_2}^{y_2}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}\,\Theta\,\theta,$$

comme ceux dont nous venons de parler. C'est sous cette forme que nous allons considérer cette équation

$$V = 0.$$

3.

84. Après avoir ramené les termes de l'équation

$$\mathrm{V} = 0$$

à la forme que nous venons d'indiquer, nous examinerons ces différents termes pour voir s'il s'en trouve qui soient de la forme

$$\int dx \; \nabla^{y_1}_{x_1} \nabla^{y_2}_{x_2} \ldots \nabla^{y_n}_{x_n} u \frac{d\theta}{dx},$$

en supposant que θ exprime, soit la variation tronquée de l'une des inconnues, soit une dérivée différentielle quelconque d'une telle variation.

Si, par cas, il s'en trouve de tels, nous les remplacerons par l'expression équivalente (formule 57, article 34):

$$\begin{aligned}
&-\int dx \; \nabla^{y_1}_{x_1} \nabla^{y_2}_{x_2} \ldots \nabla^{y_n}_{x_n} \frac{du}{dx} \theta \\
&+ \rceil^{x''}_{x} \nabla^{y_1}_{x_1} \nabla^{y_2}_{x_2} \ldots \nabla^{y_n}_{x_n} u \, \theta \\
&- \rceil^{x'}_{x} \nabla^{y_1}_{x_1} \nabla^{y_2}_{x_2} \ldots \nabla^{y_n}_{x_n} u \, \theta \\
&- \Sigma \int dx \; \nabla^{y_1}_{x_1} \ldots\ldots \nabla^{y_\rho}_{x_\rho} \ldots\ldots \nabla^{y_n}_{x_n} z_\rho \frac{du}{dx_\rho} \theta \\
&- \Sigma \int dx \; \nabla^{y_1}_{x_1} \ldots\ldots \nabla^{y_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{y_n}_{x_n} z_\rho \, u \frac{d\theta}{dx_\rho} \\
&- \Sigma \int dx \; \nabla^{y_1}_{x_1} \ldots \rceil^{x''_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{y_n}_{x_n} z''_\rho \, u \, \theta \\
&- \Sigma \int dx \; \nabla^{y_1}_{x_1} \ldots\ldots \rceil^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots\ldots \nabla^{y_n}_{x_n} z'_\rho \, u \, \theta,
\end{aligned}$$

dans laquelle ρ devra être successivement égal à 1, 2, 3, . . n, et le signe Σ indique qu'il faut prendre la somme des termes que l'on trouvera de cette manière.

Après cette première transformation, nous recommencerons, s'il le faut, de même, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à une nouvelle équation

$$\mathrm{V}_1 = 0,$$

qui ne renferme plus de termes de la forme

$$\int dx\ \nabla_{x_1}^{y_1}\ \nabla_{x_2}^{y_2}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}u\,\frac{d\theta}{dx}.$$

85. Après cela, nous examinerons de nouveau les termes de la transformée

$$V_1=0,$$

pour voir s'il s'en trouve qui soient de la forme

$$\nabla_x^y\int dx_1\ \nabla_{x_2}^{y_2}\ldots\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}u\,\frac{d\theta}{dx_1},$$

en désignant encore par θ, soit une des variations tronquées des inconnues, soit une dérivée différentielle quelconque d'une telle variation.

Si, par cas, il s'en trouve de tels, nous remplacerons chacun d'eux par l'expression équivalente (formule 57, article 34):

$$\begin{aligned}
&-\nabla_x^y\int dx_1\ \nabla_{x_2}^{y_2}\ldots\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}\frac{du}{dx_1}\theta\\
&+\nabla_x^y\, 1_{x_1}^{x''_1}\ \nabla_{x_2}^{y_2}\ldots\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}u\,\theta\\
&-\nabla_x^y\, 1_{x_1}^{x'_1}\ \nabla_{x_2}^{y_2}\ldots\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}u\,\theta\\
&-\Sigma\nabla_x^y\int dx_1\ \nabla_{x_2}^{y_2}\ldots\nabla_{x_\rho}^{y_\rho}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}\frac{du}{dx_\rho}z_\rho\,\theta\\
&-\Sigma\nabla_x^y\int dx_1\ \nabla_{x_2}^{y_2}\ldots\nabla_{x_\rho}^{y_\rho}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}z_\rho\,u\,\frac{d\theta}{dx_\rho}\\
&-\Sigma\nabla_x^y\int dx_1\ \nabla_{x_2}^{y_2}\ldots 1_{x_\rho}^{x''_\rho}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}z''\,u\,\theta\\
&-\Sigma\nabla_x^y\int dx_1\ \nabla_{x_2}^{y_2}\ldots 1_{x_\rho}^{x'_\rho}\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}z'_\rho\,u\,\theta.
\end{aligned}$$

Après cette transformation, nous recommencerons, s'il y a lieu, de la même manière, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à une nouvelle équation

$$V_2=0,$$

qui ne renferme plus de termes de la forme

$$\nabla_x^y \int dx_1 \nabla_{x_2}^{y_2} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d\theta}{dx_1}.$$

86. Alors nous examinerons à son tour l'équation

$$V_2 = 0,$$

pour voir si elle renferme des termes qui soient de la forme

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \int dx_2 \nabla_{x_3}^{y_3} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d\theta}{dx_2},$$

en donnant à θ la même signification que dans les deux articles précédents.

Si, par cas, il s'y trouve des termes de cette forme, nous les transformerons comme les précédents, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous ayons épuisé toutes les variables indépendantes x, x_1, $x_2 \ldots x_n$.

87. De cette manière, nous finirons par arriver à une dernière transformée [1]

$$V_{n+1} = 0,$$

dont aucun terme ne pourra être de la forme

$$\nabla_x^y \ldots \int dx_i \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d\theta}{dx_i}:$$

c'est là une proposition fondamentale, que nous allons démontrer dans l'article suivant.

88. D'abord, en passant d'une transformée $V_i = 0$ à la trans-

[1] D'après la marche des calculs, il est visible que les termes des transformées successives $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$, ... $V_{n+1} = 0$, sont toujours de la forme $\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \Theta\theta$.

formée suivante : $V_{i+1} = 0$, on a fait disparaître tous les termes de la forme

$$\nabla \frac{y}{x} \ldots \int dx_i \ldots \nabla \frac{y_n}{x_n} u \frac{d\theta}{dx_i},$$

et, par conséquent, cette transformée

$$V_{i+1} = 0$$

ne doit renfermer aucun terme de cette forme : tout se réduit donc à faire voir que

Si une transformée $V_k = 0$, dont l'indice k est plus grand que i, ne renferme pas de terme de la forme

$$\nabla \frac{y}{x} \ldots \int dx_i \ldots \nabla \frac{y_n}{x_n} u \frac{d\theta}{dx_i},$$

il en sera de même de la transformée suivante : $V_{k+1} = 0$.

Les termes de l'équation $V_k = 0$, qui passent sans transformation dans l'équation $V_{k+1} = 0$, ne pouvant pas être de la forme

$$\nabla \frac{y}{x} \ldots \int dx_i \ldots \ldots \nabla \frac{y_n}{x_n} u \frac{d\theta_i}{dx_i},$$

puisque, par hypothèse, $V_k = 0$ n'en contient point qui soient de cette forme, il suffira de considérer ceux des termes de l'équation $V_k = 0$ qui sont susceptibles de transformation.

Soit donc

$$\text{A} \qquad \nabla \frac{y}{x} \ldots \nabla \frac{y_i}{x_i} \ldots \int dx_k \ldots \nabla \frac{y_n}{x_n} u \frac{d\theta}{dx_k}$$

un des termes de l'équation

$$V_k = 0$$

que l'on doit transformer, et dans lequel d'ailleurs θ exprime, comme dans les articles précédents, soit une des variations tronquées des inconnues, soit une des dérivées différentielles d'une pareille variation.

Dans le passage de l'équation $V_k = 0$ à $V_{k+1} = 0$, ce terme se changera (formule 57, article 34) en l'expression

$$
\begin{array}{ll}
 & - \nabla_x^y \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} \frac{du}{dx_k}\theta \\
 & + \nabla_x^y \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots 1_{x_k}^{x''_k} \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u\theta \\
 & - \nabla_x^y \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots 1_{x_k}^{x'_k} \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u\theta \\
\mathrm{B} & - \Sigma\, \nabla_x^y \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots \nabla_{x_\rho}^{y_\rho} \cdots \nabla_{y_n}^{y_n} \frac{du}{dx_\rho} z_\rho\, \theta \\
 & - \Sigma\, \nabla_x^y \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots \nabla_{x_\rho}^{x''_\rho} \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u z_\rho \frac{d\theta}{dx_\rho} \\
 & - \Sigma\, \nabla_x^y \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots 1_{x_\rho}^{x''_\rho} \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u z''_\rho\, \theta \\
 & - \Sigma\, \nabla_x^y \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots 1_{x_\rho}^{x'_\rho} \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u z'_\rho\, \theta,
\end{array}
$$

dans laquelle ρ *devra recevoir successivement les valeurs* $k+1$, $k+2, \ldots n$; tandis que le signe Σ indique la somme des termes trouvés de cette manière.

Maintenant, si θ n'est pas de la forme $\frac{d\theta'}{dx_i}$, en désignant momentanément par θ' une des variations tronquées des inconnues, ou bien une des dérivées différentielles d'une pareille variation, comme les nombres $k+1$, $k+2, \ldots n$, sont, par hypothèse, tous plus grands que i, aucun terme de l'expression ci-dessus ne pourra être de la forme

$$\nabla_x^y \cdots \int dx_i \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d\theta'}{dx_i}.$$

Mais il peut se faire que θ soit de la forme $\frac{d\theta'}{dx_i}$; alors, comme, d'après l'hypothèse, le terme

$$\text{A} \qquad \nabla_x^y \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d\theta}{dx_k},$$

ne peut pas être de la forme

$$\nabla_x^y \cdots \int dx_i \cdots \int dx_k \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d^2\theta'}{dx_i\, dx_k},$$

et que, d'ailleurs (article 75), le signe $\nabla_{x_i}^{y_i}$ ne peut représenter que l'un des signes

$$\int dx_i, \text{ ou bien } \daleth_{x_i}^{y_i},$$

il faudra que ce terme soit de la forme

$$\nabla_x^y \ldots\ldots \daleth_{x_i}^{y_i} \ldots \int dx_k \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d^2\theta'}{dx_i\, dx_k};$$

aucun terme de la somme ci-dessus B ne pourra donc être de la forme

$$\nabla_x^y \ldots \int dx_i \ldots \int dx_k \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d^2\theta'}{dx_i\, dx_k},$$

c'est-à-dire, de la forme

$$\nabla_x^y \ldots \int dx_i \ldots \int dx_k \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d\theta}{dx_i}.$$

Nous pouvons donc conclure que le terme A de l'équation $V_k = o$ ne peut introduire dans l'équation suivante $V_{k+1} = o$, aucun terme de la forme

$$\nabla_x^y \ldots\ldots \int dx_i \ldots \nabla_{x_k}^{y_k} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d\theta}{dx_i};$$

et comme on peut en dire autant de tous les termes de $V_k = o$, qui sont susceptibles d'être transformés, notre proposition ci-dessus se trouve complétement démontrée.

4.

89. D'après ce qui précède, nous n'avons plus qu'à considérer l'équation

$$V_{n+1} = o,$$

dans laquelle il n'entre aucun terme de la forme

$$\nabla_x^y \ldots \int dx_\rho \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d\theta}{dx_\rho}$$

et dans laquelle encore nous pouvons regarder les variations des inconnues comme entièrement indépendantes les unes des autres.

Il résulte de là que, si l'on désigne par ω une des variations des inconnues qui entrent dans cette équation $V_{n+1} = 0$, et par Ω la somme des termes qui renferment cette variation, on doit avoir

$$\Omega = 0,$$

puisque, pour y parvenir, il suffit de supposer nulles toutes les variations qui sont différentes de ω.

Comme chacune des variations tronquées des inconnues conduira à une équation partielle analogue, il nous suffira de voir quelles sont les équations, soit indéfinies, soit aux limites, qui peuvent résulter de chacune de ces équations partielles.

90. La solution de la question que nous venons de poser repose sur quelques lemmes que nous allons développer.

Il résulte des premiers principes du calcul différentiel que si nous faisons

$$\omega = p\,(x_\rho - y_\rho)^h,$$

et que nous désignions par g un nombre entier positif moindre que h, la dérivée

$$\frac{d^g\omega}{dx_\rho{}^g}$$

sera de la forme

$$q\,(x_\rho - y_\rho)^{h-g};$$

que, par suite, nous aurons

$$\daleth_{x_\rho}^{y_\rho} \frac{d^g\omega}{dx_\rho} = \daleth_{x_\rho}^{y_\rho}\, q\,(x_\rho - y_\rho)^{h-g} = 0,$$

puisque, quand on remplace x_ρ par y_ρ, le facteur $x_\rho - y_\rho$ devient identiquement nul.

De là et de la formule 69 (article 40), nous conclurons que, *dans ce cas,* on doit avoir

$$(1)\qquad \nabla_x^y \ldots \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \mathrm{M} \frac{d^g\omega}{dx_\rho^g} = 0.$$

Par une raison analogue, si l'on fait

$$\omega = p\,(x_\rho - y_\rho)^{2l},$$

et que l'exposant $2l$ soit assez élevé, on aura identiquement

$$\daleth_{x_\rho}^{y_\rho} \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}\omega}{dx^\mu\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}\ldots} = 0,$$

et, par suite,

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \ldots \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \mathrm{M} \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}\omega}{dx^\mu\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}\ldots} = 0.$$

91. Si nous faisons encore

$$\omega = p\,(x_\rho - y_\rho)^h,$$

nous trouverons pour la valeur de $\frac{d^h\omega}{dx^h_\rho}$ un résultat tel que

$$\frac{d^h\omega}{dx^h_\rho} = (1.2.3\ldots h).p + (x_\rho - y_\rho)\,q:$$

dès lors nous aurons

$$\daleth_{x_\rho}^{y_\rho} \frac{d^h\omega}{dx^h_\rho} = (1.\ 2.\ 3\ldots\ h)\ \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} p,$$

et, par suite, d'après la formule 70 (article 41), nous aurons

$$(2)\quad \nabla_x^y \ldots \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \mathrm{M} \frac{d^h\omega}{dx^h_\rho} = (1.\ 2\ldots h)\ \nabla_x^y \ldots \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} p\,\mathrm{M}.$$

92. Maintenant désignons, pour un moment, par g, g', g'',...,

des nombres entiers positifs quelconques, et par h, h', h'', . . . d'autres nombres entiers, tels que

$$h \geqq g,\ h' \geqq g',\ h'' \geqq g'',\ h''' \geqq g''' \ldots$$

en supposant toutefois que l'un des nombres g, g', g'',... au moins est moindre que celui des nombres h, h', h'',.. qui lui correspond. Cela posé,

Si nous faisons

$$\omega = r\,(x_\rho - y_\rho)^h\,(x_\rho{}' - y_\rho{}')^{h'}\,(x_\rho{}'' - y_\rho{}'')^{h''},$$

la dérivée

$$\frac{d^{g+g'+g''+\ldots}\,\omega}{dx_\rho{}^g\,dx_{\rho'}{}^{g'}\,dx_{\rho''}{}^{g''}\ldots}$$

contiendra, au moins, un des facteurs $(x_\rho - y_\rho)$, $(x_\rho{}' - y_\rho{}')$, $(x_\rho{}'' - y_\rho{}'')$, . . . toutes les fois que l'un des nombres g, g', g'', . . . sera respectivement moindre que celui des nombres h, h', h'', . . . qui lui correspond, tandis que la dérivée

$$\frac{d^{h+h'+h''+\ldots}\,\omega}{dx_\rho{}^h\,dx_{\rho'}{}^{h'}\,dx_{\rho''}{}^{h''}\ldots}$$

sera de la forme

$$(1.\,2..h)\,(1.\,2..h')\,(1.\,2..h'')\,(\ldots)\,r + (x_\rho - y_\rho)\,r_1 + (x_\rho{}' - y_\rho{}')\,r'_1 + (x_\rho{}'' - y_\rho{}'')\,r''_1 + \ldots\ldots$$

Nous pouvons donc conclure que

$$\nabla_x^y \ldots \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} \ldots \daleth_{x_{\rho'}}^{y_{\rho'}} \ldots \daleth_{x_{\rho''}}^{y_{\rho'}} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \mathrm{M}\,\frac{d^{g+g'+g''+\ldots}\,\omega}{dx_\rho{}^g\,dx_{\rho'}{}^{g'}\,dx_{\rho''}{}^{g''}\ldots} = 0,$$

et que

$$(3)\qquad \nabla_x^y \ldots \daleth_{x_\rho}^{y_\rho} \ldots \daleth_{x_{\rho'}}^{y_{\rho'}} \ldots \daleth_{x_{\rho''}}^{y_{\rho''}} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \mathrm{M}\,\frac{d^{h+h'+h''+\ldots}\,\omega}{dx^h\,dx^{h'}\,dx''\ldots}$$

$$= (1.\,2..h)\,(1.\,2..h')\,(1.\,2\ldots h'')\,(\ldots)\,\nabla_x^y \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \mathrm{M}r:$$

il suffit pour cela de répéter les raisonnements des deux derniers articles.

92 *bis.* Nous savons (article 37) qu'une expression de la forme

$$\text{C} \qquad \nabla^{y}_{x} \nabla^{y_1}_{x_1} \ldots \nabla^{y_n}_{x_n} \mathrm{R}^2,$$

dans laquelle les signes ∇^{y}_{x}, $\nabla^{y_1}_{x_1}$, ... $\nabla^{y_n}_{x_n}$, représentent, les uns des signes d'intégration $\int dx_k$, $\int dx_{k'}$, $\int dx_{k''}$, ... et les autres des signes de substitution $\daleth^{y_\rho}_{x_\rho}$, $\daleth^{y_{\rho'}}_{x_{\rho'}}$, $\daleth^{y_{\rho''}}_{x_{\rho''}}$, ... peut se mettre sous la forme

$$\int_{x'''_k}^{x^{iv}_k} dx_k \int_{x'''_{k'}}^{x^{iv}_{k'}} dx_{k'} \int_{x'''_{k''}}^{x^{iv}_{k''}} dx_{k''} \ldots \daleth^{y_\rho}_{x_\rho} \daleth^{y_{\rho'}}_{x_{\rho'}} \daleth^{y_{\rho''}}_{x_{\rho''}} \ldots \mathrm{R}^2,$$

pourvu qu'on détermine convenablement les nouvelles limites x'''_k, x^{iv}_k, $x'''_{k'}$, $x^{iv}_{k'}$, $x'''_{k''}$, $x^{iv}_{k''}$....

Nous savons encore (article 5) que

$$\daleth^{y_\rho}_{x_\rho} \daleth^{y_{\rho'}}_{x_{\rho'}} \daleth^{y_{\rho''}}_{x_{\rho''}} \ldots \mathrm{R}^2 = \left(\daleth^{y_\rho}_{x_\rho} \daleth^{y_{\rho'}}_{x_{\rho'}} \daleth^{y_{\rho''}}_{x_{\rho''}} \ldots \mathrm{R}\right)^2.$$

Nous pourrons donc remplacer l'expression C ci-dessus par

$$\text{D} \qquad \int_{x'''_k}^{x^{iv}_k} dx_k \int_{x'''_{k'}}^{x^{iv}_{k'}} dx_{k'} \int_{x'''_{k''}}^{x^{iv}_{k''}} dx_{k''} \ldots \left(\daleth^{y_\rho}_{x_\rho} \daleth^{y_{\rho'}}_{x_{\rho'}} \daleth^{y_{\rho''}}_{x_{\rho''}} \ldots \mathrm{R}\right)^2,$$

laquelle se compose d'éléments dont aucun ne peut être négatif.

Si donc cette expression C est nulle, il faut que, dans toute l'étendue qui peut être comprise entre les limites x'''_k, x^{iv}_k, $x'''_{k'}$, $x^{iv}_{k'}$, $x'''_{k''}$, $x^{iv}_{k''}$, ... la valeur de

$$\daleth^{y_\rho}_{x_\rho} \daleth^{y_{\rho'}}_{x_{\rho'}} \daleth^{y_{\rho''}}_{x_{\rho''}} \ldots \mathrm{R}$$

se réduise à zéro.

Cependant, s'il était possible que l'on eût $x'''_k = x^{iv}_k$, ou bien $x'''_{k'} = x^{iv}_{k'}$, ou bien $x'''_{k''} = x^{iv}_{k''}$, ou bien...., l'expression D

serait évidemment nulle d'elle-même, et, par suite, la conclusion précédente pourrait ne plus être vraie.

Quant aux limites x'''_k, x^{IV}_k, $x'''_{k'}$, $x^{\text{IV}}_{k'}$, ... d'après ce que nous avons vu (article 37), si nous désignons par x_l une quelconque des variables x_k, x_k', x_k'', ... et par x_μ, x_μ', x_μ'', ... celles des variables x_ρ, x_ρ', x_ρ'', ... dont les indices sont moindres que l, nous devrons avoir

$$x'''_l = \daleth^{y_\mu}_{x_\mu} \daleth^{y_{\mu'}}_{x_{\mu'}} \daleth^{y_{\mu''}}_{x_{\mu''}} \ldots x'_l, \qquad x^{\text{IV}}_l = \daleth^{y_\mu}_{x_\mu} \daleth^{y_{\mu'}}_{x_{\mu'}} \daleth^{y_{\mu''}}_{x_{\mu''}} \ldots x''_l.$$

93. Après ces lemmes, nous reprendrons l'équation

$$\Omega = 0$$

de l'article 89, dont nous partagerons la discussion en deux paragraphes. Dans le premier, nous traiterons le cas où la variation ω peut être une fonction quelconque de toutes les variables indépendantes; dans le suivant, nous traiterons le cas où, par la nature du problème, la variation ω ne peut renfermer qu'une partie seulement des variables indépendantes.

5.

94. D'après ce que nous avons démontré (article 88), aucun terme de l'équation

$$\Omega = 0$$

ne peut être de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots \int dx_\rho \ldots \int dx_n \, \Theta \, \frac{d\theta}{dx_\rho},$$

en désignant par θ, soit la variation ω elle-même, soit une dérivée différentielle de cette variation. Si donc nous réunissons en un seul terme tous ceux de cette équation qui seront de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots \int dx_\rho \ldots \int dx_n \, \Theta \, \omega,$$

ce qui nous donnera une certaine somme, comme

$$\text{E} \qquad \int dx \int dx_1 \ldots \int dx_\rho \ldots \int dx_n \, \text{M} \, \omega,$$

tous les autres termes de l'équation $\Omega = 0$ devront renfermer un ou plusieurs des signes de substitution

$$\daleth_{x}^{x'}, \daleth_{x}^{x''}, \daleth_{x_1}^{x'_1}, \daleth_{x_1}^{x''_1}, \daleth_{x_2}^{x'_2}, \daleth_{x_2}^{x''_2}, \ldots \daleth_{x_n}^{x'_n}, \daleth_{x_n}^{x''_n}.$$

Cela posé,

Nous ferons, pour abréger,

$$\omega_1 = (x - x')(x - x'')(x_1 - x'_1)(x_1 - x''_1)(\ldots)(x_\rho - x'_\rho)(x_\rho - x''_\rho)(\ldots)(x_n - x'_n)(x_n - x''_n),$$

et nous prendrons pour un moment

$$\omega = \text{M} \, \omega_1^{2l};$$

dès lors, si l'exposant $2l$ est assez grand, tout terme de la forme

$$\nabla_x^y \ldots \daleth_{x_\rho}^{x''_\rho} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \Theta \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}\omega}{dx^\mu \, dx_1^{\mu'} \, dx_2^{\mu''} \ldots}$$

deviendra identiquement nul à cause du facteur $(x_\rho - x'_\rho)^{2l}$ contenu dans ω (article 90). Il en sera de même des termes de la forme

$$\nabla_x^y \ldots \daleth_{x_\rho}^{x''_\rho} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \Theta \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}\omega}{dx^\mu \, dx_1^{\mu'} \, dx_2^{\mu''} \ldots},$$

à cause du facteur $(x_\rho - x''_\rho)^{2l}$ contenu pareillement dans ω (article 90). Nous en conclurons que l'équation $\Omega = 0$ se réduira au seul terme ci-dessus E, qui devra être nul et qui se changera en

$$\int dx \int dx_1 \ldots \int dx_\rho \ldots \int dx_n . \text{M}^2 \, \omega_1^{2l} = 0.$$

Mais cette dernière ne peut avoir lieu qu'autant que l'on a (article 92)

(4) $$M\,\omega_1{}^l = 0,$$

à moins que deux des limites d'une même variable indépendante ne soient égales entre elles.

D'ailleurs, d'après la forme ci-dessus du facteur ω_1 que nous avons pris égal à

$$(x-x')\,(x-x'')\,(x_1-x'_1)\,(x_1-x''_1)\,(....)\,(x'_\rho-x'_\rho)\,(x_\rho-x''_\rho)\,(...)\,(x_n-x'_n)\,(x_n-x''_n),$$

il ne peut pas être nul dans l'étendue qui doit être comprise entre les limites $x'_1, x'', x'_1, x_1'', \ldots x'_n, x''_n$; il faudra donc que, dans toute cette étendue, l'on ait

(4) $$M = 0.$$

En substituant cette valeur de M dans l'équation $\Omega = 0$, le terme

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_n\, M\,\omega$$

disparaîtra de lui-même, quelle que soit la valeur de ω, et, par suite, l'équation $\Omega = 0$ se réduira à une autre équation

$$\Omega_1 = 0,$$

dont tous les termes renfermeront un ou plusieurs des signes de substitution

$$\daleth_x^{x'},\ \daleth_x^{x''},\ \daleth_{x_1}^{x'_1},\ \daleth_{x_1}^{x''_1},\ \ldots\ \daleth_{x_n}^{x'_n},\ \daleth_{x_n}^{x''_n},$$

et dans laquelle ω pourra être quelconque.

95. Maintenant, nous séparerons ceux des termes de l'équation réduite $\Omega_1 = 0$ qui ne renferment *qu'un seul et même signe de substitution,* par exemple le signe $\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}$. Alors, d'après ce que nous avons

prouvé à l'article 88, aucun de ces termes ne pourra être de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots \urcorner_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \int dx_n . \Theta \frac{d\theta}{dx_\mu},$$

en désignant par μ un nombre quelconque, différent de ρ, et par θ, soit la variation ω elle-même, soit une de ses dérivées différentielles. Ces termes seront donc tous de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots \urcorner_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \int dx_n \Theta \frac{d^h\omega}{dx^h_\rho}.$$

Cela posé,

Nous réunirons en un seul terme tous ceux de cette dernière forme qui seront affectés de la dérivée de ω de l'ordre le plus élevé, ce qui nous donnera une somme connue

$$\mathrm{F} \qquad \int dx \int dx_1 \ldots \urcorner_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \int dx_n \mathrm{N} \frac{d^h\omega}{dx^h_\rho};$$

alors, comme tous les termes de l'équation $\Omega_1 = 0$ doivent, par hypothèse, renfermer un ou plusieurs signes de substitution, tous ceux qui seront différents du terme F seront, les uns de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots \urcorner_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \int dx_n \Theta \frac{d^g\omega}{dx^g_\rho};$$

mais alors g sera moindre que h, les autres d'une autre forme.

Mais alors ils renfermeront un ou plusieurs signes de substitution différents de $\urcorner_{x_\rho}^{x'_\rho}$.

Après cela, nous ferons, pour abréger,

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{x_\rho - x'_\rho} = (x - x')(x - x'')(\ldots)(x_\rho - x''_\rho)(\ldots)(x_n - x'_n)(x_n - x''_n),$$

et *nous prendrons pour un moment*

$$\omega = \mathrm{N}\,\omega_2^{2l}\,(x_\rho - x'_\rho)^h.$$

De cette manière, tous les termes qui seront de la forme

$$\int dx \ldots 7_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \int dx_n \,\Theta\, \frac{d^g\omega}{dx^g},$$

et pour lesquels g sera moindre que h, seront nuls (article 90); de même si l'exposant $2l$ est assez grand, tous les termes qui seront de la forme

$$\nabla_x^y \ldots 7_{x_i}^{x''_i} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \,\Theta\, \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}\omega}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}\ldots},$$

et pour lesquels i sera différent de ρ, seront nuls, à cause du facteur $(x_i - x''_i)^{2l}$ contenu dans ω (article 90, additions). Tous les termes qui seront de la forme

$$\nabla_x^y \ldots 7_{x_i}^{x'_i} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \,\Theta\, \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}\omega}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}\ldots},$$

et pour lesquels i sera différent de ρ, seront encore nuls, à cause du facteur $(x_i - x'_i)^{2l}$ contenu dans ω (article 90).

Ainsi, de tous les termes de l'équation $\Omega_1 = 0$, il ne restera que le seul terme F, lequel devra aussi être nul pour que l'équation soit satisfaite. Nous devrons avoir (en vertu de la formule 2, article 91 :

$$(1.2.3\ldots h) \int dx \int dx_1 \ldots 7_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \int dx_n \,\mathrm{N}^2\, \omega_2^{2l} = 0.$$

De là, et du lemme de l'article 92, nous conclurons que l'on doit avoir

$$7_{x_\rho}^{x'_\rho}\, \mathrm{N}\, \omega_2^{l} = 0$$

dans toute l'étendue qui peut être comprise entre les limites

x' et x'' pour x, x'_1 et x''_1 pour x_1, ... $x'_{\rho-1}$ et $x''_{\rho-1}$ pour $x_{\rho-1}$, $7_{x_\rho}^{x'_\rho} x'_{\rho+1}$ et $7_{x_\rho}^{x'_\rho} x''_{\rho+1}$ pour $x_{\rho+1}$, $7_{x_\rho}^{x'_\rho} x'_{\rho+2}$ et $7_{x_\rho}^{x'_\rho} x''_{\rho+2}$ pour $x_{\rho+2}$, ... $7_{x_\rho}^{x'_\rho} x'_n$ et $7_{x_\rho}^{x'_\rho} x''_n$ pour x_n;

mais comme nous avons supposé

$$\omega_2 = (x-x')\,(x-x'')\,(\ldots.)\,(x_\rho - x''_\rho)\,(x_{\rho+1} - x'_{\rho+1})$$
$$(x_{\rho+1} - x''_{\rho+1})\,(\ldots.)\,(x_n - x'_n)\,(x_n - x''_n),$$

nous aurons (en observant que x', x'', x'_1, x''_1, . . $x'_{\rho-1}$, $x''_{\rho-1}$ et x''_ρ ne défendent point x_ρ)

$$\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}\,\omega_2 = (x-x')\,(x-x'')\,(\ldots.)\,(x_\rho - x''_\rho)\,\left(x_{\rho+1} - \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} x'_{\rho+1}\right)$$
$$\left(x_{\rho+1} - \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} x''_{\rho+1}\right)\,(\ldots.)\,\left(x'_n - \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} x'_n\,\left(x_n - \daleth^{x'}\right)\right),$$

de sorte que ce facteur ne peut pas devenir nul dans l'intérieur des limites que nous avons à considérer, et, par suite, l'expression

$$\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}\,\mathrm{N}\,\omega^l_2 = \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}\,\mathrm{N}_2\,\left(\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}\,\omega\right)^l$$

ne peut être égale à zéro qu'en supposant

$$\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}\,\mathrm{N} = 0.$$

Cela nous fournit une nouvelle équation entre les inconnues et les variables indépendantes, et de plus le terme F de l'équation $\Omega_1 = 0$ devient identiquement nul, quelle que soit la valeur de ω (article 40).

Nous pourrons donc supprimer ce terme F de l'équation $\Omega_1 = 0$ et recommencer d'une manière analogue avec la nouvelle équation obtenue ainsi, et ainsi de suite. De cette manière, nous finirons par arriver à une nouvelle équation,

$$\Omega_2 = 0,$$

dont tous les termes renfermeront au moins deux des signes de substitution

$$\daleth_x^{x'},\ \daleth_x^{x''},\ \daleth_{x_1}^{x''_1},\ \ldots\ldots\ \daleth_{x_n}^{x'_n},\ \daleth_{x_n}^{x''_n},$$

et dans laquelle ω pourra toujours être quelconque.

96. Maintenant, nous séparerons ceux des termes de l'équation $\Omega_2 = 0$ qui renferment deux signes particuliers de substitution, par exemple $\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}$ et $\daleth_{x_{\rho 1}}^{x''_{\rho 1}}$, mais qui n'en renferment point d'autres. Ces termes seront de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \daleth_{x_{\rho 1}}^{x''_{\rho 1}} \ldots \int dx_n \,\Theta\, \theta,$$

et, d'après la proposition de l'article 88, θ ne peut être que de la forme

$$\frac{d^{h+h'}\omega}{dx^h_\rho\, dx^{h'}_{\rho 1}}.$$

Parmi tous les termes du groupe que nous venons de considérer, nous choisirons ceux pour lesquels h a la plus grande valeur possible. Enfin, parmi ces dernières, nous réunirons en un seul terme connu

$$\mathrm{G} \qquad \int dx \int dx_1 \ldots \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \daleth_{x_{\rho 1}}^{x''_{\rho 1}} \ldots \int dx_n \,\mathrm{P}\, \frac{d^{h+h'}\omega}{dx^h_\rho\, dx^{h'}_{\rho 1}}$$

ceux qui seront affectés de la plus grande valeur de h'.

De cette manière les autres termes de l'équation $\Omega_2 = 0$ seront, les uns de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \daleth_{x_{\rho 1}}^{x''_{\rho 1}} \ldots \int dx_n \,\Theta\, \frac{d^{g+h'}\omega}{dx^g_{x\rho}\, dx^{h'}_{\rho 1}};$$

mais alors g sera moindre que h';

Les autres, de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \daleth_{x_{\rho 1}}^{x''_{\rho 1}} \ldots \int dx_n \,\Theta\, \frac{d^{h+g'}\omega}{dx^h_\rho\, dx^{g'}_{\rho 1}},$$

mais alors g' sera moindre que h';

Les autres seront de la forme

$$\int dx_\gamma \int dx_1 \ldots \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \daleth_{x_{\rho 1}}^{x''_{\rho 1}} \ldots \int dx \,\Theta\, \frac{d^{g+g'}\omega}{dx^g_\rho\, dx^{g'}_{\rho 1}},$$

mais alors g sera moindre que h et g' sera moindre que h';

Les autres, enfin, seront de la forme

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \ldots \daleth_{x_\mu}^{x'_\mu} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \ominus \theta,$$

ou bien

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \ldots \daleth_{x_\mu}^{x''_\mu} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \ominus \theta,$$

en désignant par μ un nombre quelconque différent de ρ et de ρ' Cela posé, nous ferons, pour abréger,

$$\omega_3 = (x - x')(x - x'')(\ldots)(x_\rho - x''_\rho)(\ldots)(x'_\rho - x'_{\rho'})(\ldots)$$
$$(x_n - x'_n)(x_n - x''_n) = \frac{\omega_1}{(x_\rho - x'_\rho)(x_{\rho 1} - x''_{\rho 1})},$$

et *nous prendrons pour un moment*

$$\omega = \mathrm{P}\, \omega_3^{2l} (x_\rho - x'_\rho)^h (x_{\rho 1} - x''_{\rho 1})^{h'}.$$

Dès lors, si l'exposant $2l$ est assez grand, tous ceux des termes de l'équation $\Omega_2 = 0$ qui sont différents de G, et que nous venons de désigner, seront nuls :

Les uns, à cause du facteur $(x_\rho - x'_\rho)^h$, dont l'exposant h est, par hypothèse, plus grand que g (voir article 92);

Les autres, à cause du facteur $(x_{\rho 1} - x''_{\rho 1})^{h'}$, dont l'exposant h' est, par hypothèse, plus grand que g' (article 92);

Les autres, à cause des facteurs $(x_\mu - x'_\mu)^{2l}$, $(x_\mu - x''_\mu)^{2l}$, contenus dans ω_3^{2l} (article 90).

Quant au terme G, il se changera en (article 92)

$$(1.2.3..h)(1.2...h') \int dx \int dx_1 \ldots \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} \ldots \int dx_n \, \mathrm{P}^2 \omega_3^{2l}$$

et, pour que l'équation $\Omega_2 = 0$ se trouve satisfaite, il faudra que cette dernière expression soit égale à zéro.

Mais, en vertu du lemme de l'article 92 *bis*, cela ne peut avoir lieu qu'autant que l'on a

$$\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} \mathrm{P}. \omega_3^{l} = 0$$

dans toute l'étendue qui peut être comprise entre les limites qui caractérisent le terme G, c'est-à-dire entre

$$x' \text{ et } x'' \text{ pour } x;\ x'_1 \text{ et } x''_1 \text{ pour } x_1;\ \ldots\ x'_{\rho-1} \text{ et } x''_{\rho+1} \text{ pour } x_\rho;$$
$$\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} x'_{\rho+1} \text{ et } \daleth_{x_\rho}^{x'_{\rho+1}} x''_{\rho+1} \text{ pour } x_{\rho+1};\ \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} x'_{\rho+2} \text{ et } \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} x''_{\rho+2}$$
$$\text{pour } x_{\rho+2};\ \ldots\ \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} x'_{\rho'-1} \text{ et } \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} x''_{\rho'-1} \text{ pour } x_{\rho'-1};$$
$$\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} x'_{\rho'+1} \text{ et } \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} x''_{\rho'+1} \text{ pour } x_{\rho'+1};\ \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} x'_{\rho'+2}$$
$$\text{et } \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} x''_{\rho'+2} \text{ pour } x_{\rho'+2};\ \ldots\ldots$$

Mais ici, comme dans les articles précédents, $\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} \omega_3$ ne peut pas devenir nul entre ces limites: nous devonc dons en conclure que l'expression

$$\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} \mathrm{P}^2 \omega_3^{2l} = \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} \mathrm{P}.\ \left(\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} \omega_3\right)^l$$

ne peut devenir nulle qu'autant que l'on a

6 $$\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} \mathrm{P} = 0.$$

Cela nous fournit une nouvelle équation entre les inconnues du problème et les variables indépendantes, et de plus, au moyen de cette valeur, le terme G de l'équation $\Omega_2 = 0$ se réduit à zéro, quelle que soit la valeur de ω (article 40).

Nous pourrons donc supprimer ce terme dans 'équation

$$\Omega_2 = 0,$$

ce qui nous donnera une nouvelle équation, que nous pourrons traiter encore de la même manière, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivions à une équation

$$\Omega_3 = 0,$$

dont tous les termes renferment trois ou un plus grand nombre des signes de substitution

$$\daleth_x^{x'},\ \daleth_x^{x''},\ \daleth_{x_1}^{x'_1},\ \daleth_{x_1}^{x''_1},\ \ldots\ldots\ \daleth_{x_n}^{x'_n},\ \daleth_{x_n}^{x''_n},$$

et dans laquelle ω peut encore être quelconque.

97. Maintenant, nous séparerons tous les termes de la nouvelle équation

$$\Omega_3 = 0$$

qui renferment trois signes particuliers de substitution, comme, par exemple, $\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}$, $\daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}}$ ... $\daleth_{x_{\rho''}}^{x'_{\rho''}}$, mais qui n'en renferment point d'autres.

Dès lors, d'après la proposition de l'article 88, ces termes ne pourront être que de la forme

$$\int dx \ldots \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} \ldots \daleth_{x_{\rho''}}^{x'_{\rho''}} \ldots \int dx_n \, \Theta \, \frac{d^{h+h'+h''}\omega}{dx^h_\rho \, dx^{h'}_{\rho'} \, dx^{h''}_{\rho''}}.$$

Parmi tous les termes de ce groupe, nous séparerons encore ceux pour lesquels le nombre h sera le plus grand;

Parmi ces derniers, nous séparerons encore ceux pour lesquels h' aura la plus grande valeur;

Enfin, parmi ces derniers, nous choisirons ceux qui répondent à la plus grande valeur de h'', et nous les réunirons en un seul terme connu

$$\text{H} \qquad \int dx \ldots \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} \ldots \daleth_{x_{\rho''}}^{x'_{\rho''}} \ldots \int dx_n \, \text{Q} \, \frac{d^{h+h'+h''}\omega}{dx^h_\rho \, dx^{h'}_{\rho'} \, dx^{h''}_{\rho''}}:$$

Après cela, nous ferons, pour abréger,

$$\omega_4 = (x-x')\,(x-x'')\,(\ldots)\,(x_\rho - x''_\rho)\,(\ldots)\,(x_{\rho'} - x'_{\rho'})\,(\ldots)\,(x_{\rho''} - x''_{\rho''}\,(\ldots)$$
$$= \frac{\omega}{(x_\rho - x'_\rho)\,(x''_{\rho'} - x'_{\rho_\prime})\,(x_{\rho''} - x'_{\rho''})},$$

et *nous prendrons pour un moment*

$$\omega = \text{Q}\, \omega^{2l}_n \,(x_\rho - x'_\rho)^h \,(x_{\rho'} - x''_{\rho'})^{h'} \,(x_{\rho''} - x'_{\rho''})^{h''};$$

alors nous prouverons, comme dans les derniers articles, que [1] tous

[1] En supposant toujours l'exposant $2l$ assez élevé.

les termes de l'équation $\Omega_3 = 0$ qui sont différents du terme H deviennent identiquement nuls, mais que ce terme H se change en

$$(1.2\ldots h)\,(1.2\,..h')\,(1.2\,..h'')\int dx \int dx_1 \,..\, \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \,..\, \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}} \ldots \daleth_{x_{\rho''}}^{x'_{\rho''}} \ldots \int dx_n\, Q^2\, \omega^{2l}{}_n.$$

Nous en conclurons que, pour que l'équation $\Omega_3 = 0$ soit satisfaite, il faut que cette dernière expression soit nulle, et que, par suite, l'on ait

$$\daleth_{x_\rho}^{x'_\rho}\, \daleth_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}}\, \daleth_{x_{\rho''}}^{x'_{\rho''}}\, Q = 0, \qquad (7)$$

dans toute l'étendue des limites qui servent à caractériser le terme H.

Cela nous fournit une nouvelle équation entre les inconnues du problème et les variables indépendantes; et, de plus, il en résulte que le terme H est identiquement nul, quelle que soit la valeur de ω. Nous pourrons donc supprimer ce terme dans l'équation $\Omega_3 = 0$; cela nous donnera une nouvelle équation que nous pourrons traiter d'une manière analogue, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivions à une nouvelle équation

$$\Omega_4 = 0,$$

dont tous les termes renferment quatre ou un plus grand nombre de signes de substitution

$$\daleth_{x}^{x'},\ \daleth_{x}^{x''},\ \daleth_{x_1}^{x'_1},\ \daleth_{x_1}^{x''_1},\ \ldots\ \daleth_{x_n}^{x'_n},\ \daleth_{x_n}^{x''_n},$$

et dans laquelle ω pourra encore être quelconque.

98. Après cela, nous pourrons traiter d'une manière analogue cette équation $\Omega_4 = 0$, et continuer de même jusqu'à ce que nous ayons épuisé tous les termes de l'équation primitive $\Omega = 0$. De cette manière, nous arriverons à cette règle générale.

Pour trouver toutes les équations, soit indéfinies, soit aux limites, qui résultent de l'équation $\Omega = 0$, il faut:

1° Réunir en un seul terme tous ceux qui se trouvent affectés en même temps et d'une même dérivée de ω et des mêmes signes de substitution $\urcorner_{x_\rho}^{y_\rho}$, $\urcorner_{x_{\rho'}}^{y_{\rho_1}}$, $\urcorner_{x_{\rho''}}^{y_{\delta''}}$, ...
ce qui donnera un résultat connu de la forme

$$K \qquad \int dx \ldots \urcorner_{x_\rho}^{y_\rho} \ldots \urcorner_{x_{\rho'}}^{y_{\rho'}} \ldots \urcorner_{x_{\rho''}}^{y_{\rho''}}, \ldots . \int dx_n \, R \, \theta;$$

2° Pour chaque terme obtenu ainsi, on fera

$$(8) \qquad \urcorner_{x_\rho}^{y_\rho} \urcorner_{x_{\rho'}}^{y_{\rho'}} \urcorner_{x_{\rho''}}^{y_{\rho''}} \ldots . R = 0,$$

laquelle devra avoir lieu dans toute l'étendue qui peut être comprise entre les limites qui servent à caractériser ce terme, et dont nous avons indiqué la formation (article 92 *bis*).

Toutefois, on ne devra pas perdre de vue la remarque renfermée dans cet article 92 *bis*, d'après laquelle le terme K peut devenir nul, parce que les limites qui doivent servir à le caractériser ne doivent renfermer aucune étendue; quelquefois même ce sera la seule manière possible de le rendre nul.

99. Pour passer au cas où ω ne doit renfermer qu'un certain nombre de variables indépendantes, nous supposerons d'abord que, par la nature du problème, ω peut être une fonction quelconque de $x, x_1, x_2 \ldots x_m$, mais qu'elle doit être indépendante de $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$.

100. Puisque ω ne renferme que les variables x, x_1, $x_2, \ldots x_m$, il en sera de même de ses différentes dérivées différentielles, lesquelles seront ainsi indépendantes des variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$. Dès lors, en désignant par θ, soit la variation ω elle-même, soit une de ses dérivées différentielles, un terme de la forme

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \ldots \nabla_{x_m}^{y_m} \nabla_{x_{m+1}}^{y_{m+1}} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \ominus \theta$$

pourra s'écrire sous cette nouvelle forme (article 24):

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \ldots \nabla_{x_m}^{y_m} \left(\theta \nabla_{x_{m+1}}^{y_{m+1}} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \ominus; \right.$$

ou bien encore, sous la forme

$$\text{L} \qquad \nabla_x^y \, \nabla_{x_1}^{y_1} \ldots \nabla_{x_m}^{y_m} \, \Theta' \theta,$$

en faisant, pour abréger,

$$(9) \qquad \Theta' = \nabla_{x_{m+1}}^{y_{m+1}} \, \nabla_{x_{m+2}}^{y_{m+2}} \ldots \nabla_{x_n}^{y_n} \, \Theta.$$

Mais, d'après la nature de la caractéristique 7, les expressions $7_{x_n}^{x'_n} u$, $7_{x_n}^{x''_n} u$, $\int u dx_n$, sont toutes les trois des fonctions de x, x_1, x_2, .. x_{n-1}, indépendantes de x_n :

Par suite, $\nabla_{x_n}^{y_n} u$ est indépendante de x_n;

Par suite, $\nabla_{x_{n-1}}^{y_{n-1}} \nabla_{x_n}^{y_n} u$ sera indépendante de x_n et x_{n-1};

Par suite, $\nabla_{x_{n-2}}^{y_{n-2}} \nabla_{x_{n-1}}^{y_{n-1}} \nabla_{x_n}^{y_n} u$ sera indépendante de x_n, x_{n-1} et x_{n-2}, et ainsi de suite.

Par conséquent, la valeur de Θ' donnée par l'équation ci-dessus sera indépendante de x_{m+1}, x_{m+2}, .. x_n, et le terme L sera composé comme s'il n'y avait que les variables indépendantes x, x_1, x_2, ... x_m.

101. On voit de là que si l'on prépare chaque terme de l'équation $\Omega = 0$ de la manière que nous venons d'indiquer dans le dernier article, elle rentrera dans le cas où l'on n'a que les variables indépendantes x, x_1, x_2, .. x_m, et où ω peut être une fonction quelconque de ces variables.

102. Maintenant, si nous rapprochons la conclusion précédente de la règle donnée à l'article 98, nous trouverons que,

Pour former les diverses équations qui peuvent provenir de l'équation aux variations $\Omega = 0$, dans le cas où ω peut être une fonction quelconque de

$$x, \; x_1, \; x_2, \; \ldots \; x_{m-1}, \; x_m,$$

mais indépendante de x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_n, il faut,

1° Grouper tous les termes qui se trouvent renfermer, et la

même dérivée de ω, et les mêmes signes d'intégration $\int dx_\mu$, $\int dx_{\mu'+1}$, $\int dx_{\mu''}$, ... relatifs à des variables x_μ, $x_{\mu'}$, $x_{\mu''}$, ... dont l'indice ne dépasse pas m;

2° Dans chacun des groupes obtenus de cette manière, supprimer les signes d'intégration $\int dx_\mu$, $\int dx_{\mu'+}$, $\int dx_{\mu''}$, ... *mais en conservant ceux qui seraient* relatifs à des variables dont l'indice est plus grand que m;

3° Égaler à zéro chacun des résultats obtenus, ce qui donnera un égal nombre d'équations qui auront lieu dans toute l'étendue qui peut être comprise entre les limites

x'''_μ et $x^{\text{IV}}{}_\mu$ pour x_μ; $x'''_{\mu'}$ et $x^{\text{IV}}{}_{\mu'}$ pour $x_{\mu'}$; $x'''_{\mu''}$ et $x^{\text{IV}}{}_{\mu''}$ pour $x_{\mu''}$, ...

qui seront différentes pour les différents groupes, et qui devront être formées comme il a été indiqué article 92 *bis*.

102. Si, par cas, il arrivait que, par la nature du problème à résoudre, une certaine variable z dût être indépendante de x_ρ, sa variation tronquée $\overline{\delta z}$ devrait aussi être indépendante de x_ρ; et, par suite, si $\overline{\delta z}$ pouvait renfermer une ou plusieurs des variables $x_{\rho+1}$, $x_{\rho+2}$, $x_{\rho+3}$, ... la théorie précédente cesserait d'être applicable. Il sera cependant facile de tourner cette difficulté et de ramener la question aux cas traités dans le paragraphe précédent et dans les premiers articles de celui-ci; il suffira de regarder dès le principe la variable z comme soumise à l'équation de condition

$$\frac{dz}{dx_\rho} = 0$$

et d'avoir égard à cette équation de condition au moyen de la méthode connue des multiplicateurs.

On agirait d'une manière analogue si, par cas, z devait être indépendante de plusieurs variables x_ρ, $x_{\rho'}$, $x_{\rho''}$ ...., en employant les équations de condition

$$\frac{dz}{dx_\rho} = 0, \quad \frac{dz}{dx_{\rho'}} = 0, \quad \frac{dz}{dx_{\rho''}} = 0 \ldots$$

103. Ce qui précède nous paraît donner les moyens de trouver toutes les équations, soit indéfinies, soit aux limites qui sont nécessaires pour déterminer complétement les maxima et les minima des intégrales définies ordinaires et des autres expressions définies que nous avons considérées. Nous terminerons donc ce chapitre en faisant observer que les méthodes que nous venons de développer s'appliqueraient également aux cas où l'on voudrait employer les variations complètes au lieu des variations tronquées. Nous ferons observer cependant *que l'emploi des variations complètes est extrêmement délicat, et que, par exemple, les variations δx, δy, ne doivent pas être supposées égales dans le calcul des variations des deux intégrales définies*

$$\int\int dx\, dy.\, P \text{ et } \int\int\int dx\, dy\, dz.\, Q,$$

puisqu'elles ne sauraient évidemment renfermer z *toutes les fois qu'il s'agira de la première intégrale, tandis qu'elles doivent renfermer cette variable lorsqu'il s'agira de la seconde.*

Nous avons négligé d'avertir que,

Toutes les fois que l'on sait *a priori* qu'il y a lieu à appliquer les simplifications mentionnées aux articles 44 et 45, il convient de les effectuer au fur et à mesure qu'on en aperçoit la possibilité. Sans cela, le calcul pourrait conduire à des équations de condition auxquelles il ne serait pas possible de satisfaire. Au reste, cela n'aurait que peu d'inconvénients, puisque cette impossibilité avertirait elle-même de la négligence que l'on aurait commise.

Mais, si l'on ne sait pas *a priori* que de pareilles simplifications doivent avoir lieu, on doit éviter de les effectuer; sans quoi, on s'exposerait à laisser de côté certaines équations de condition peut-être indispensables. C'est ainsi que nous avons agi dans notre première question de l'article 131.

CHAPITRE IV.

1.

104. Dans ce nouveau chapitre nous donnerons les formules qui sont nécessaires pour la recherche des maxima et minima, dans le cas où le nombre des variables indépendantes ne dépasse pas trois.

105. Pour ne pas renvoyer continuellement aux autres chapitres, nous rappellerons que l'on doit avoir (ρ étant différent de i)

(1) $\dfrac{d\int u\, dx_i}{dx_\rho} = \int \dfrac{du}{dx_\rho}\, dx_i + 1^{x''_i}_{x_i}\, u\, \dfrac{dx''_i}{dx_\rho} - 1^{x'_i}_{x_i}\, u\, \dfrac{dx'_i}{dx_\rho}$ (article 13),

(2) $\dfrac{d\, 1^{y_i}_{x_i}\, u}{dx_\rho} = 1^{y_i}_{x_i} \left(\dfrac{du}{dx_\rho} + \dfrac{du}{dx_i}\, \dfrac{dy_i}{dx_\rho}\right)$ (article 18),

(3) $\int \dfrac{du}{dx_i}\, dx_i = 1^{x''_i}_{x_i}\, u - 1^{x'_i}_{x_i}\, u$ (article 5),

et par suite, en remplaçant dans cette dernière u par $u\ \theta$,

(4) $\int u\, \dfrac{d\theta}{dx_i}\, dx_i = - \int dx_i\, \dfrac{du}{dx_i}\, \theta + 1^{x''_i}_{x_i}\, u\, \theta - 1^{x'_i}_{x_i}\, u\, \theta.$

106. Quant au calcul des variations, nous aurons dans tous les cas

(5) $\delta\, u = \bar{\delta}\, u + \dfrac{du}{dx}\, \delta\, x + \dfrac{du}{dx_1}\, \delta\, x_1 + \dfrac{du}{dx_2}\, \delta\, x_2 \ldots$ (article 60),

(6) $\bar{\delta}\, \dfrac{d^{\mu+\mu'+\mu''}\omega}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}} = \dfrac{d^{\mu+\mu'+\mu''}\bar{\delta}\omega}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}}$ (article 63),

(7) $\bar{\delta} \int u\, dx_i = \int dx_i\, \bar{\delta}\, u + 1^{x''_i}_{x_i}\, u\, \bar{\delta}\, x''_i - 1^{x'_i}_{x_i}\, u\, \bar{\delta}\, x'_i$ (article 64).

De plus, si l'on a

$$u = \mathrm{F}\,(a,\, b,\, c,\, \ldots\, p,\, q,\, r,\ldots\, x,\, x_1,\, x_2),$$

il viendra

$$\bar{\delta} u = \frac{du}{da}\bar{\delta} a + \frac{du}{db}\bar{\delta} b + \frac{du}{dc}\bar{\delta} c + \ldots \tag{8}$$

$$+ \frac{du}{dp}\bar{\delta} p + \frac{du}{dq}\bar{\delta} a + \frac{du}{dr}\bar{\delta} r + \ldots \qquad \text{(Art. 62.)}$$

Enfin si, par cas, w est une expression définie, on aura

$$\delta w = \bar{\delta} w. \qquad \text{(Art. 61.)} \tag{9}$$

Par inadvertance, nous oubliions la formule

$$\bar{\delta}\, \daleth^{y_i}_{x_i} u = \daleth^{y_i}_{x_i} \left(\bar{\delta} u + \frac{du}{dx_i}\bar{\delta} y_i\right). \qquad \text{(Art. 66.)} \tag{10}$$

107. Telles sont les formules que nous allons successivement appliquer aux cas d'une, deux et trois variables indépendantes.

2.

108. Dans le cas d'une variable indépendante, nous aurons, comme cas particuliers,

$$\bar{\delta} \int u dx = \int dx\, \bar{\delta} u + \daleth^{x''}_{x} u \bar{\delta} x'' - \daleth^{x'}_{x} u \bar{\delta} x',$$

$$\bar{\delta}\, \daleth^{y}_{x} u = \daleth^{y}_{x} \left(\bar{\delta} u + \frac{du}{dx}\bar{\delta} y\right),$$

et pour opérer les transformations du paragraphe 3, chapitre III,

$$\int u \frac{d\theta}{dx} dx = - \int dx \frac{du}{dx}\theta + \daleth^{x''}_{x} u\theta - \daleth^{x'}_{x} u\theta.$$

3.

109. Dans le cas de deux variables indépendantes x et x_1, nous aurons d'abord (article 106)

$$\bar\delta \int u dx = \int dx\, \bar\delta u + 1_x^{x''} u\bar\delta x'' - 1_x^{x'} u\bar\delta x'$$
$$\bar\delta\, 1_x^{y} u = 1_x^{y}\left(\bar\delta u + \frac{du}{dx}\bar\delta y\right);$$

alors nous remplacerons successivement la fonction u par l'intégrale $\int u dx_1$ et par $1_{x_1}^{y_1} u$, et nous trouverons

$$\begin{aligned}
\bar\delta \int dx \int dx_1 = {} & \int dx \int dx_1\, \bar\delta u + 1_x^{x''} \int dx_1\, u\bar\delta x'' - 1_x^{x'} \int dx_1\, u\bar\delta x' \\
& + \int dx\, 1_{x_1}^{x''_1} u\bar\delta x''_1 - \int dx\, 1_{x_1}^{x'_1} u\bar\delta x'_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar\delta \int dx\, 1_{x_1}^{y_1} u = {} & \int dx\, 1_{x_1}^{y_1} \bar\delta u + \int dx\, 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx_1} \bar\delta y_1 \\
& + 1_x^{x''} 1_{x_1}^{y_1} u\bar\delta x'' - 1_x^{x'} 1_{x_1}^{y_1} u\bar\delta x',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar\delta\, 1_x^{y} \int u dx_1 = {} & 1_x^{y} \int dx_1\, \bar\delta u + 1_x^{y} \int dx_1 \frac{du}{dx} \bar\delta y \\
& + 1_x^{y} 1_{x_1}^{x''_1} u\bar\delta x''_1 - 1_x^{y} 1_{x_1}^{x'_1} u\bar\delta x'_1 \\
& + 1_x^{y} 1_{x_1}^{x''_1} u \frac{dx''_1}{dx} \bar\delta y - 1_x^{y} 1_{x_1}^{x'_1} u \frac{dx'_1}{dx} \bar\delta y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar\delta\, 1_x^{y} 1_{x_1}^{y_1} u = {} & 1_x^{y} 1_{x_1}^{y_1} \bar\delta u + 1_x^{y} 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx} \bar\delta y + 1_x^{y} 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx_1} \bar\delta y_1 \\
& + 1_x^{y} 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y.
\end{aligned}$$

110. Nous aurons encore, comme cas particulier (art. 105),

$$\int \frac{du}{dx} dx = 1_x^{x''} u - 1_x^{x'} u;$$

alors, en remplaçant successivement u par $\int u dx_1$ et par $1_{x_1}^{y_1} u$, nous trouverons

$$\int dx \int dx_1 \frac{du}{dx} = 1_x^{x''} \int dx_1 u - 1_x^{x'} \int dx_1 u - \int dx\, 1_{x_1}^{x''_1} u \frac{dx''_1}{dx} + \int dx\, 1_x^{x'_1} u \frac{dx'_1}{dx},$$

$$\int dx\, 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx} = 1_x^{x''} 1_{x_1}^{y_1} u - 1_x^{x'} 1_{x_1}^{y_1} u - \int dx\, 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx};$$

ensuite, nous remplacerons dans ces dernières u par $u\theta$, et il viendra

$$\int dx \int dx_1 u \frac{d\theta}{dx} = - \int dx \int dx_1 \frac{du}{dx} \theta + 1_x^{x''} \int dx_1 u\theta - 1_x^{x'} \int dx_1 u\theta - \int dx\, 1_{x_1}^{x''_1} u\theta \frac{dx''_1}{dx} + \int dx\, 1_{x_1}^{x'_1} u\theta \frac{dx'_1}{dx},$$

$$\int dx\, 1_{x_1}^{y_1} u \frac{d\theta}{dx} = - \int dx\, 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx} \theta - \int dx\, 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx_1} \theta \frac{dy_1}{dx} - \int dx\, 1_{x_1}^{y_1} u \frac{d\theta}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} + 1_x^{x''} 1_{x_1}^{y_1} u\theta - 1_x^{x'} 1_{x_1}^{y_1} u\theta.$$

111. Nous aurons encore, comme cas particulier (art. 105),

$$\int \frac{du}{dx_1} dx_1 = 1_{x_1}^{x''_1} u - 1_{x_1}^{x'_1} u,$$

et, par suite, en remplaçant u par $u\theta$,

$$\int dx_1 . u \frac{d\theta}{dx_1} = - \int dx_1 \frac{du}{dx_1} \theta + 1_{x_1}^{x''_1} u\theta - 1_{x_1}^{x'_1} u\theta;$$

nous en conclurons

$$\int dx \int dx_1 u \frac{d\theta}{dx_1} = - \int dx \int dx_1 \frac{du}{dx_1} \theta + \int dx\, 1_{x_1}^{x''_1} u\theta - \int dx\, 1_{x_1}^{x'_1} u\theta,$$

$$1_x^y \int dx_1 u \frac{d\theta}{dx_1} = - 1_x^y \int dx_1 \frac{du}{dx_1} \theta + 1_x^y 1_{x_1}^{x''_1} u\theta - 1_x^y 1_{x_1}^{x'_1} u\theta.$$

4.

112. Dans les cas de trois variables indépendantes x, x_1, x_2, nous commencerons par trouver les diverses formules que nous venons de donner dans le dernier paragraphe, et en remplaçant ensuite u par $\int u dx_2$, ou $1_{x_2}^{y_2} u$, nous en déduirons (de celles qui ne renferment point θ)

$$
\begin{aligned}
(11)\quad \bar\delta \int dx \int dx_1 \int dx_2 u = & \int dx \int dx_1 \int dx_2 \bar\delta u \\
& + \int dx \int dx_1 1_{x_2}^{x''_2} u \bar\delta x''_2 - \int dx \int dx_1 1_{x_2}^{x'_2} u \bar\delta x'_2 \\
& + \int dx 1_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 u \bar\delta x''_1 - \int dx 1_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 u \bar\delta x'_1 \\
& + 1_x^{x''} \int dx_1 \int dx_2 u \bar\delta x'' - 1_x^{x'} \int dx_1 \int dx_2 u \bar\delta x',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12)\quad \bar\delta \int dx \int dx_1 1_{x_2}^{y_2} u = & \int dx \int dx_1 1_{x_2}^{y_2} \bar\delta u + \int dx \int dx_1 1_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_2} \bar\delta y_2 \\
& + \int dx 1_{x_1}^{x''_1} 1_{x_2}^{y_2} u \bar\delta x''_1 - \int dx 1_{x_1}^{x'_1} 1_{x_2}^{y_2} u \bar\delta x'_1 \\
& + 1_x^{x''} \int dx_1 1_{x_2}^{y_2} u \bar\delta x'' - 1_x^{x'} \int dx_1 1_{x_2}^{y_2} u \bar\delta x'.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(13)\quad \bar\delta \int dx 1_{x_1}^{y_1} \int u dx_2 = & \int dx 1_{x_1}^{y_1} \int dx_2 . \bar\delta u + \int dx 1_{x_1}^{y_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_1} \bar\delta y_1 \\
& + \int dx 1_{x_1}^{y_1} 1_{x_2}^{x''_2} u \bar\delta x''_2 - \int dx 1_{x_1}^{y_1} 1_{x_2}^{x'_2} u \bar\delta x'_2 \\
& + \int dx 1_{x_1}^{y_1} 1_{x_2}^{x''_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} \bar\delta y_1 - \int dx 1_{x_1}^{y_1} 1_{x_2}^{x'_2} u \frac{dx'_2}{dx_1} \bar\delta y_1 \\
& + 1_x^{x''} 1_{x_1}^{y_1} \int dx_2 u \bar\delta x'' - 1_x^{x'} 1_{x_1}^{y_1} \int dx_2 u \bar\delta x',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(14)\quad \bar\delta 1_x^y \int dx_1 \int u dx_2 = & 1_x^y \int dx_1 \int dx_2 \bar\delta u + 1_x^y \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx} \bar\delta y \\
& + 1_x^y \int dx_1 1_{x_2}^{x''_2} u \bar\delta x''_2 - 1_x^y \int dx_1 1_{x_2}^{x'_2} u \bar\delta x'_2 \\
& + 1_x^y \int dx_1 1_{x_2}^{x''_2} u \frac{dx''_2}{dx} \bar\delta y - 1_x^y \int dx_1 1_{x_2}^{x'_2} u \frac{dx'_2}{dx} \bar\delta y \\
& + 1_x^y 1_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 u \bar\delta x''_1 - 1_x^y 1_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 u \bar\delta x'_1 \\
& + 1_x^y 1_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 u \frac{dx''_1}{dx} \bar\delta y - 1_x^y 1_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 u \frac{dx'_1}{dx} \bar\delta y,
\end{aligned}
$$

$$(15)\quad \begin{aligned} \bar\delta \int dx\, \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u = {} & \int dx\, \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \bar\delta u + \int dx\, \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} \bar\delta y_1 \\ & + \int dx\, \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \bar\delta y_2 + \int dx\, \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} \bar\delta y_1 \\ & + \rceil^{x''}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u\, \bar\delta x'' - \rceil^{x'}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u\, \bar\delta x', \end{aligned}$$

$$(16)\quad \begin{aligned} \bar\delta \rceil^{y}_{x} \int dx_1\, \rceil^{y_2}_{x_2} u = {} & \rceil^{y}_{x} \int dx_1\, \rceil^{y_2}_{x_2} \bar\delta u + \rceil^{y}_{x} \int dx_1\, \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx} \bar\delta y \\ & + \rceil^{y}_{x} \int dx_1\, \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \bar\delta y_2 + \rceil^{y}_{x} \int dx_1\, \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx} \bar\delta y \\ & + \rceil^{y}_{x} \rceil^{x''_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u\, \bar\delta x''_1 - \rceil^{y}_{x} \rceil^{x'_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u\, \bar\delta x'_1 \\ & + \rceil^{y}_{x} \rceil^{x''_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u \frac{dx''_1}{dx} \bar\delta y - \rceil^{y}_{x} \rceil^{x'_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u \frac{dx'_1}{dx} \bar\delta y, \end{aligned}$$

$$(17)\quad \begin{aligned} \bar\delta \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \int u\, dx_2 = {} & \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \int dx_2\, \bar\delta u + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx} \bar\delta y \\ & + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_1} \bar\delta y_1 + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y \\ & + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x''_2}_{x_2} u\, \bar\delta x''_2 - \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x'_1}_{x_1} u\, \bar\delta x'_2 \\ & + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx} \bar\delta y - \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x'_1}_{x_1} u \frac{dx'_2}{dx} \bar\delta y \\ & + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} \bar\delta y_1 - \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1} \bar\delta y_1 \\ & + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y - \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y, \end{aligned}$$

$$(18)\quad \begin{aligned} \bar\delta \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u = {} & \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \bar\delta u + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx} \bar\delta y \\ & + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} \bar\delta y_1 + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \bar\delta y_2 \\ & + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx} \bar\delta y \\ & + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} \bar\delta y_1 + \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y, \end{aligned}$$

$$(19)\quad \begin{aligned} \int dx \int dx_1 \int dx_2 . \frac{du}{dx} = {} & \rceil^{x''}_{x} \int dx_1 \int dx_2\, u - \rceil^{x'}_{x} \int dx_1 \int dx_2 .\, u \\ & - \int dx\, \rceil^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 .\, u \frac{dx''_1}{dx} + \int dx\, \rceil^{x'_1}_{x_1} \int dx_2\, u \frac{dx'_1}{dx} \\ & - \int dx \int dx_1\, \rceil^{x''_2}_{x} u \frac{dx''_2}{dx} + \int dx \int dx_1\, \rceil^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx}, \end{aligned}$$

$$(20)\quad \int dx \int dx_1 \daleth^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx} = - \int dx \int dx_1 \daleth^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx}$$
$$+ \daleth^{x''}_{x} \int dx_1 \daleth^{y_2}_{x_2} u - \daleth^{x'}_{x} \int dx_1 \daleth^{y_2}_{x_2} u$$
$$- \int dx \daleth^{x''_1}_{x_1} \daleth^{y_2}_{x_2} u \frac{dx''_1}{dx} + \int dx \daleth^{x'_1}_{x_1} \daleth^{y_2}_{x_2} u \frac{dx'_1}{du},$$

$$(21)\quad \int dx \daleth^{y_1}_{x_1} \int dx_2 . \frac{du}{dx} = - \int dx \daleth^{y_1}_{x_1} \int dx_2 . \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx}$$
$$+ \daleth^{x''}_{x} \daleth^{y_1}_{x_1} \int dx_2 u - \daleth^{x'}_{x} \daleth^{y_1}_{x_1} \int dx_2 u$$
$$- \int dx \daleth^{y_1}_{x_1} \daleth^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx} + \int dx \daleth^{y_1}_{x_1} \daleth^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx}$$
$$- \int dx \daleth^{y_1}_{x_1} \daleth^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} + \int dx \daleth^{y_1}_{x_1} \daleth^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1} \frac{dy_1}{dx},$$

$$(22)\quad \int dx \daleth^{y_1}_{x_1} \daleth^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx} = - \int dx \daleth^{y_1}_{x_1} \daleth^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} - \int dx \daleth^{y_1}_{x_1} \daleth^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx}$$
$$- \int dx \daleth^{y_1}_{x_1} \daleth^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} \frac{dy_1}{dx}$$
$$+ \daleth^{x''}_{x} \daleth^{y_1}_{x_1} \daleth^{y_2}_{x_2} u - \daleth^{x'}_{x} \daleth^{y_1}_{x_1} \daleth^{y_2}_{x_2} u,$$

$$\int dx_1 \int dx_2 . \frac{du}{dx_1} = \daleth^{x''_1}_{x} \int dx_2 . u - \daleth^{x'_1}_{x} \int dx_2 u$$
$$- \int dx_1 \daleth^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} + \int dx_1 \daleth^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1},$$

$$\int dx_1 \daleth^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} = - \int dx_1 \daleth^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1}$$
$$+ \daleth^{x''_1}_{x_1} \daleth^{y_2}_{x_2} u - \daleth^{x'_1}_{x_1} \daleth^{y_2}_{x_2} u.$$

113. Les deux dernières formules que nous venons de trouver nous donneront

$$(23)\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_1} = \int dx \daleth^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 u - \int dx \daleth^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 u$$
$$- \int dx \int dx_1 \daleth^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} + \int dx \int dx_1 \daleth^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1},$$

$$(24)\quad \daleth^{y}_{x} \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_1} = \daleth^{y}_{x} \daleth^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 u - \daleth^{y}_{x} \daleth^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 u$$
$$- \daleth^{y}_{x} \int dx_1 \daleth^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} + \daleth^{y}_{x} \int dx_1 \daleth^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1},$$

$$(25)\quad \int dx \int dx_1 \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} = - \int dx \int dx_1 \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} + \int dx \rceil^{x''_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u - \int dx \rceil^{x'_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u,$$

$$(26)\quad \rceil^{y}_{x} \int dx_1 \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} = - \rceil^{y}_{x} \int dx_1 \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} + \rceil^{y}_{x} \rceil^{x''_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u - \rceil^{y}_{x} \rceil^{x'_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u.$$

114. Enfin l'identité

$$\int dx_2 . \frac{du}{dx_2} = \rceil^{x''_2}_{x_2} u - \rceil^{x'_2}_{x_2} u$$

nous donnera

$$(27)\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_2} = \int dx \int dx_1 \rceil^{x''_2}_{x_2} u - \int dx \int dx_1 \rceil^{x'_2}_{x_2} u,$$

$$(28)\quad \int dx \rceil^{y_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_2} = \int dx \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x''_2}_{x_2} u - \int dx \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x'_2}_{x_2} u,$$

$$(29)\quad \rceil^{y}_{x} \int dx_1 \int dx_2 . \frac{du}{dx_2} = \rceil^{y}_{x} \int dx_1 \rceil^{x''_2}_{x_2} u - \rceil^{y}_{x} \int dx_1 \rceil^{x'_2}_{x_2} u,$$

$$(30)\quad \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_2} = \rceil^{y}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x''_2}_{x_2} u - \rceil^{y_2}_{x} \rceil^{y_1}_{x_1} \rceil^{x'_2}_{x_2} u.$$

115. Après cela, nous remplacerons u par $u\theta$ dans les formules 19, 20, 21.......................... 29 et 30 des articles précédents, et nous trouverons ainsi

$$\begin{aligned}(31)\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx} = &- \int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx} \theta \\ &+ \rceil^{x''}_{x} \int dx_1 \int dx_2\, u\theta - \rceil^{x'}_{x} \int dx_1 \int dx_2\, u\theta \\ &- \int dx \rceil^{x''_1}_{x_1} \int dx_2\, u \frac{dx''_1}{dx} \theta + \int dx \rceil^{x'_1}_{x_1} \int dx_2\, u \frac{dx'_1}{dx} \theta \\ &- \int dx \int dx_1 \rceil^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx} \theta + \int dx \int dx_1 \rceil^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx} \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(32)\quad \int dx \int dx_1 \rceil^{y_2}_{x_2} u \frac{d\theta}{dx} = &- \int dx \int dx_1 \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx} \theta - \int dx \int dx_1 \rceil^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx} \theta \\ &- \int dx \int dx_1 \rceil^{y_2}_{x_2} u \frac{dy_2}{dx} \frac{d\theta}{dx_2} \\ &+ \rceil^{x''}_{x} \int dx_1 \rceil^{y_2}_{x_2} u\, \theta - \rceil^{x'}_{x} \int dx_1 \rceil^{y_2}_{x_2} u\, \theta \\ &- \int dx \rceil^{x''_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u \frac{dx''_1}{dx} \theta + \int dx \rceil^{x'_1}_{x_1} \rceil^{y_2}_{x_2} u \frac{dx'_1}{dx} \theta,\end{aligned}$$

$$(33)\quad \int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx} = -\int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \int dx_2 \frac{du}{dx}\theta - \int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \int dx_2 \frac{du_1}{dx}\frac{dy_1}{dx}\theta$$
$$-\int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \int dx_2\, u \frac{dy_1}{dx}\frac{d\theta}{dx_1}$$
$$+\urcorner_{x}^{x''} \urcorner_{x_1}^{y_1} \int dx_2\, u\,\theta - \urcorner_{x}^{x'} \urcorner_{x_1}^{y_1} \int dx_2\, u\,\theta$$
$$-\int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} u \frac{dx''_2}{dx}\theta + \int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} u \frac{dx'_2}{dx}\theta$$
$$-\int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} u \frac{dx''_2}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\theta + \int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} u \frac{dx'_2}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\theta,$$

$$(34)\quad \int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} u \frac{d\theta}{dx} = -\int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx}\theta - \int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\theta$$
$$-\int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx}\theta - \int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\theta$$
$$-\int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} u \frac{dy_1}{dx}\frac{d\theta}{dx_1} - \int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} u \frac{dy_2}{dx}\frac{d\theta}{dx_2}$$
$$-\int dx \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} u \frac{dy_2}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\frac{d\theta}{dx_2}$$
$$+\urcorner_{x}^{x''} \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} u\,\theta - \urcorner_{x}^{x'} \urcorner_{x_1}^{y_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} u\,\theta,$$

$$(35)\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2 .\, u \frac{d\theta}{dx_1} = -\int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_1}\theta$$
$$+\int dx \urcorner_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\, u\,\theta - \int dx \urcorner_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\, u\,\theta$$
$$-\int dx \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x''_2} u \frac{dx''_2}{dx_1}\theta + \int dx \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x'_2} u \frac{dx'_2}{dx_1}\theta,$$

$$(36)\quad \urcorner_{x}^{y} \int dx_1 \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx_1} = -\urcorner_{x}^{y} \int dx_1 \int dx_2 .\, \frac{du}{dx_1}\theta$$
$$+\urcorner_{x}^{y} \urcorner_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\, u\,\theta - \urcorner_{x}^{y} \urcorner_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\, u\,\theta$$
$$-\urcorner_{x}^{y} \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x''_2} u \frac{dx''_2}{dx_1}\theta + \urcorner_{x}^{y} \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x'_2} u \frac{dx'_2}{dx_1}\theta,$$

$$(37)\quad \int dx \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{y_2} u \frac{d\theta}{dx_1} = -\int dx \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_1}\theta - \int dx \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx_1}\theta$$
$$-\int dx \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{y_2} u \frac{dy_2}{dx_1}\frac{d\theta}{dx_2}$$
$$+\int dx \urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} u\,\theta - \int dx \urcorner_{x_1}^{x'_1} \urcorner_{x_2}^{y_2} u\,\theta,$$

(38) $$\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\int dx_1 \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{y_2} u\frac{d\theta}{dx_1} = -\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\int dx_1 \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{y_2}\frac{du}{dx_1}\theta - \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\int dx_1 \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{y_2}\frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx_1}\theta$$
$$- \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\int dx_1 \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{y_2} u\frac{dy_2}{dx_1}\frac{d\theta}{dx_2}$$
$$+ \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_1}^{x''_1}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{y_2} u\theta - \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_1}^{x'_1}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{y_2} u\theta.$$

(39) $$\int dx\int dx_1\int dx_2\, u\frac{d\theta}{dx_2} = -\int dx\int dx_1\int dx_2\frac{du}{dx_2}\theta$$
$$+\int dx\int dx_1 \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{x''_2} u\theta - \int dx\int dx_1 \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{x'_2} u\theta,$$

(40) $$\int dx \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_1}^{y_1}\int dx_2\, u\frac{d\theta}{dx_2} = -\int dx \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_1}^{y_1}\int dx_2\frac{du}{dx_2}\theta$$
$$+\int dx \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_1}^{y_1}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{x''_2} u\theta - \int dx \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_1}^{y_1}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{x'_2} u\theta,$$

(41) $$\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\int dx_1\int dx_2\, u\frac{d\theta}{dx_2} = -\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\int dx_1\int dx_2\frac{du}{dx_2}\theta$$
$$+\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\int dx_1 \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{x''_2} u\theta - \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\int dx_1 \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{x'_2} u\theta,$$

(42) $$\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y'}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_1}^{y_1}\int dx_2\, u\frac{d\theta}{dx_2} = -\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_1}^{y_1}\int dx_2\frac{du}{dx_2}\theta$$
$$+\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_1}^{y_1}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{x''_2} u\theta - \mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x}^{y}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_1}^{y_1}\mathop{\mathsf{1}}\nolimits_{x_2}^{x'_2} u\theta.$$

116. Nous pourrions continuer d'une manière analogue et considérer successivement quatre, cinq, . . . variables indépendantes. Mais, d'un côté, cette marche permettrait difficilement d'apercevoir la loi des résultats, tandis que, d'un autre côté, l'emploi de la caractéristique ∇ nous a rendu la chose facile.

5.

117. D'après ce que nous avons vu dans le dernier chapitre, lorsqu'il s'agira de rechercher les maxima et minima des fonctions définies provenant de fonctions de trois variables indépendantes,

l'équation $V = o$, calculée au moyen des formules des paragraphes précédents, se composera d'une suite de termes de la forme

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{y_2} \ominus \theta,$$

en désignant toujours par θ, soit la variation tronquée d'une des inconnues, soit une dérivée différentielle d'une pareille variation. De là, et d'après la marche des calculs des articles 84 et suivants, on voit que la transformation $V_3 = o$ se composera de termes de la même forme, mais dont aucun ne pourra être de l'une des suivantes

$$\int dx \; \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{y_2} \ominus \frac{d\theta_1}{dx},$$

$$\nabla_x^y \int dx_1 \; \nabla_{x_2}^{y_2} \ominus \frac{d\theta_1}{dx_1},$$

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \int dx_2 \ominus \frac{d\theta_1}{dx_2},$$

en désignant par θ_1, soit une des variations tronquées des inconnues, soit une dérivée différentielle d'une semblable variation.

118. D'après ce que nous venons de voir, si nous désignons par θ_2 une variation tronquée de l'une des inconnues du problème, la somme des termes de l'équation $V_3 = o$ qui sera affectée de cette variation θ_2 (*et non de ses dérivées*) se présentera sous la forme suivante, dans laquelle, selon les circonstances, il pourra manquer un ou plusieurs termes:

$$\begin{aligned} & \int dx \int dx_1 \int dx_2 \; M \, \theta_2 \\ + & \int dx \int dx_1 \; 7_{x_2}^{x''_2} \; M_1 \, \theta_2 \\ + & \int dx \int dx_1 \; 7_{x_2}^{x'_2} \; M_2 \, \theta_2 \\ + & \int dx \; 7_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \; M_3 \, \theta_2 \\ + & \int dx \; 7_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \; M_4 \, \theta_2 \\ + & \; 7^{x''} \int dx_1 \int dx_2 \; M_5 \, \theta_2 \end{aligned}$$

$$+ \daleth_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \, M_6 \, \theta_2$$
$$+ \int dx \, \daleth_{x_1}^{x''_1} \daleth_{x_2}^{x''_2} \, M_7 \, \theta_2$$
$$+ \int dx \, \daleth_{x_1}^{x''_1} \daleth_{x_2}^{x'_2} \, M_8 \, \theta_2$$
$$+ \int dx \, \daleth_{x_1}^{x'_1} \daleth_{x_2}^{x''_2} \, M_9 \, \theta_2$$
$$+ \int dx \, \daleth_{x_1}^{x'_1} \daleth_{x_2}^{x'_2} \, M_{10} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x''} \int dx_1 \, \daleth_{x_2}^{x''_2} \, M_{11} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x''} \int dx_1 \, \daleth_{x_2}^{x'_2} \, M_{12} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x'} \int dx_1 \, \daleth_{x_2}^{x''_2} \, M_{13} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x'} \int dx_1 \, \daleth_{x_2}^{x'_2} \, M_{14} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x''} \daleth_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \, M_{15} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x''} \daleth_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \, M_{16} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x'} \daleth_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \, M_{17} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x'} \daleth_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \, M_{18} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x''} \daleth_{x_1}^{x''_1} \daleth_{x_2}^{x''_2} \, M_{19} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x''} \daleth_{x_1}^{x''_1} \daleth_{x_2}^{x'_2} \, M_{20} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x''} \daleth_{x_1}^{x'_1} \daleth_{x_2}^{x''_2} \, M_{21} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x''} \daleth_{x_1}^{x'_1} \daleth_{x_2}^{x'_2} \, M_{22} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x'} \daleth_{x_1}^{x''_1} \daleth_{x_2}^{x''_2} \, M_{23} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x'} \daleth_{x_1}^{x''_1} \daleth_{x_2}^{x'_2} \, M_{24} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x'} \daleth_{x_1}^{x'_1} \daleth_{x_2}^{x''_2} \, M_{25} \, \theta_2$$
$$+ \daleth_{x}^{x'} \daleth_{x_1}^{x'_1} \daleth_{x_2}^{x'_2} \, M_{26} \, \theta_2.$$

119. Si θ_2 représentait une dérivée d'une des variations tronquées des inconnues, on arriverait à trouver dans l'équation

$V_3 = 0$ une somme analogue à la précédente, mais dans laquelle il manquerait nécessairement les termes de la forme

$$\int dx \ \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{y_2} \Theta \frac{d\theta}{dx},$$
$$\nabla_x^y \int dx_1 \ \nabla_{x_2}^{y_2} \Theta \frac{d\theta}{dx_1},$$
$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \int dx_2 \ \Theta \frac{d\theta}{dx_2},$$

puisque, par hypothèse, l'équation $V_3 = 0$ ne peut pas renfermer des termes de cette dernière forme (article 88).

120. Quant à la manière de tirer de l'équation $V_3 = 0$ les diverses équations, soit indéfinies, soit aux limites, qu'elle peut renfermer, nous renverrons aux articles 94 et suivants.

121. Nous terminerons ce chapitre par quelques considérations géométriques qui nous serviront à matérialiser, pour ainsi dire, les formes des expressions que nous venons de considérer, et à les rendre par là plus faciles à concevoir. Elles formeront le sujet du paragraphe suivant.

6.

122. Nous regarderons les variables indépendantes x, x_1, x_2, comme les coordonnées rectangulaires d'un point pris dans l'intérieur d'un corps T, dont la surface servirait à déterminer les limites de ces variables; en outre, pour fixer les idées, nous supposerons l'axe de x_2 vertical et dirigé de bas en haut.

Dès lors, x'_2 et x''_2 seront les hauteurs de deux points de la surface du corps T, situées sur une même ordonnée parallèle à l'axe de x_2, et la différence $x''_2 - x'_2$ sera la partie de cette ordonnée qui sera interceptée par le corps et comprise dans son intérieur.

Nous désignerons par F'_2 la face inférieure de ce corps; dont l'équation sera $x_2 = x'_2$, et l'étendue

$$\int dx \int dx_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2},$$

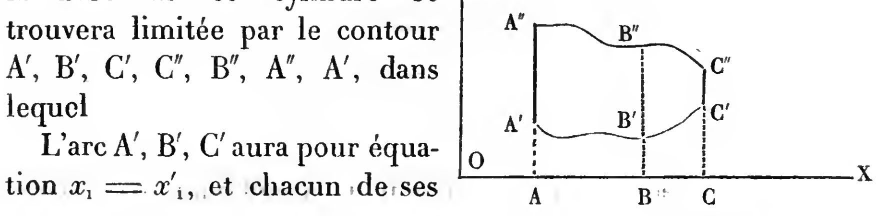
que nous écrirons sous la forme (article 77)

$$\int dx \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x'_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_2}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2}.$$

Nous désignerons par F''_2 la face supérieure du corps T, dont l'équation sera $x_2 = x''_2$, et l'étendue

$$\int dx \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x''_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)}.$$

123. Concevons un cylindre vertical circonscrit au corps T; la base de ce cylindre se trouvera limitée par le contour A′, B′, C′, C″, B″, A″, A′, dans lequel



L'arc A′, B′, C′ aura pour équation $x_1 = x'_1$, et chacun de ses éléments différentiels aura pour valeur $dx \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2}$;

L'arc A″, B″, C″ aura pour équation $x_1 = x''_1$, et chacun de ses éléments différentiels aura pour valeur $dx \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2}$;

La droite A′, A″ aura pour équation $x = x'$;

La droite C′, C″ aura pour équation $x = x''$.

124. Maintenant, tous les points du corps T pour lesquels nous aurons $x_1 = x'_1$ seront en même temps sur la surface du cylindre circonscrit et formeront, soit une simple courbe ayant A′, B′, C′ pour projection horizontale, soit une face cylindrique dont les dimensions verticales seraient exprimées par $\urcorner_{x_1}^{x'_1} (x''_2 - x'_2)$.

Comme ce dernier cas embrasse le premier comme cas particulier, nous désignerons par F'_1 la face dont il est question, et dont l'étendue sera

$$\int dx \sqrt{1+\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2}\, 7_{x_1}^{x'_1}\,(x''_2-x'_2),$$

ou bien

$$\int dx\; 7_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \sqrt{1+\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2},$$

en observant que $x''_2-x'_2$ peut être remplacé par $\int dx_2$ et que le facteur $\sqrt{1+\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2}$, ne renfermant ni x_1 ni x_2, peut passer sous les signes $7_{x_1}^{x'_1}$ et $\int dx_2$.

125. Des considérations analogues nous feront admettre une nouvelle face cylindrique F''_1, dont les points seront donnés par l'équation $x_1=x''_1$, et dont l'étendue sera

$$\int dx\; 7_{x_1}^{x''_1} \int dx \sqrt{1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2}.$$

126. Les mêmes considérations nous feront admettre encore une face plane F' dont les points seront donnés par l'équation $x=x'$, et dont l'étendue sera

$$7_x^{x'} \int dx_1 \int dx_2.$$

127. Enfin, les mêmes considérations nous feront admettre une dernière face plane F'', dont les points seront donnés par l'équation $x=x''$, et dont l'étendue sera

$$7_x^{x''} \int dx_1 \int dx_2.$$

128. Ordinairement les deux faces cylindriques F'_1 et F''_2 devront se réduire à la simple ligne de contact du corps T et du

cylindre circonscrit, et les faces planes F′ et F″ aux points de contact des plans tangents au corps T qui sont perpendiculaires à l'axe de x. Mais dans le calcul des variations on ne doit point supposer qu'il en est ainsi, puisque l'on peut supposer que le corps auxiliaire auquel le corps cherché doit être comparé renferme de pareilles faces, lors même que le corps cherché ne doit pas en renfermer lui-même.

129. Maintenant, nous ferons observer que si une fonction u renferme la variable x_2, les expressions $\daleth_{x_2}^{x'_2} u$, $\daleth_{x_2}^{x''_2} u$, se rapporteront, la première à des points de la face inférieure F'_2, et la seconde à des points de la face supérieure F''_2.

De même, si u renferme la variable x_1, les deux expressions $\daleth_{x_1}^{x'_1} u$ et $\daleth_{x_1}^{x''_1} u$ se rapporteront, la première à des points de la face cylindrique F'_1 et la seconde à des points de la face cylindrique F''_1.

De même encore, si u renferme x, les deux expressions $\daleth_{x}^{x'} u$ et $\daleth_{x}^{x''} u$ se rapporteront, la première à des points de la face plane F′ et la seconde à des points de la seconde face plane F″.

Par suite, une expression de la forme

$$\daleth_{x}^{x'} \daleth_{x_2}^{x''_2} u$$

se rapportera à des points qui doivent se trouver en même temps et sur la face plane F′ et sur la face supérieure F''_2, c'est-à-dire à ceux de l'arête commune aux deux faces.

De même, une expression telle que

$$\daleth_{x}^{x'} \daleth_{x_1}^{x'_1} \daleth_{x_2}^{x''_2} u$$

se rapportera au point unique situé sur les trois faces F′, F'_1 et F''_2, et ainsi de suite pour les autres expressions.

130. Nous terminerons ici l'exposition des formules et considérations qui se rapportent aux expressions définies provenant

des fonctions de trois variables indépendantes, et nous passerons aux applications particulières qui feront l'objet d'un nouveau chapitre.

CHAPITRE V.

I.

131. Pour première application des théories précédentes, nous chercherons

Quelle peut être la surface qui, sous une même étendue superficielle, renferme le plus grand volume.

132. D'abord, le volume aura pour expression

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2,$$

et, par suite, sa variation tronquée, calculée au moyen de la formule 11, article 112, sera

$$\begin{aligned} &\int dx \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x''_2} \overline{\delta} x''_2 - \int dx \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x'_2} \overline{\delta} x'_2 \\ &+ \int dx \urcorner_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \overline{\delta} x''_1 - \int dx \urcorner_{x_2}^{x'_2} \int dx_2 \overline{\delta} x'_1 \\ &+ \urcorner_{x}^{x''} \int dx_1 \int dx_2 \overline{\delta} x'' - \urcorner_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \overline{\delta} x' \end{aligned}$$

et la condition du maximum exigera que cette variation soit nulle (article 79).

133. La face plane F' du corps cherché aura pour expression (article 126)

$$\urcorner_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2,$$

et, par suite, sa variation tronquée, calculée par la formule 14 de l'article 112, sera

$$
\mathrm{F}' \quad
\begin{aligned}
&\daleth_x^{x'} \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x''_2} \bar{\delta} x''_2 &&- \daleth_x^{x'} \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x'_2} \bar{\delta} x'_2 \\
+ &\daleth_x^{x'} \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x''_2} \frac{dx''_2}{dx} \bar{\delta} x' &&- \daleth_x^{x'} \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x'_2} \frac{dx'_2}{dx} \bar{\delta} x' \\
+ &\daleth_x^{x'} \daleth_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \bar{\delta} x''_1 &&- \daleth_x^{x'} \daleth_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \bar{\delta} x'_1 \\
+ &\daleth_x^{x'} \daleth_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \frac{dx''_1}{dx} \bar{\delta} x' &&- \daleth_x^{x'} \daleth_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \frac{dx_1'}{dx} \bar{\delta} x'.
\end{aligned}
$$

La face plane opposée F'' aura pour expression (article 127)

$$\daleth_x^{x''} \int dx_1 \int dx_2,$$

et, par suite, sa variation tronquée sera

$$
\mathrm{F}'' \quad
\begin{aligned}
&\daleth_x^{x''} \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x''_2} \bar{\delta} x''_2 &&- \daleth_x^{x''} \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x'_2} \bar{\delta} x'_2 \\
+ &\daleth_x^{x''} \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x''_2} \frac{dx''_2}{dx} \bar{\delta} x'' &&- \daleth_x^{x''} \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x'_2} \frac{dx'_2}{dx} \bar{\delta} x'' \\
+ &\daleth_x^{x''} \daleth_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \bar{\delta} x''_1 &&- \daleth_x^{x''} \daleth_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \bar{\delta} x'_1 \\
+ &\daleth_x^{x''} \daleth_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \frac{dx''_1}{dx} \bar{\delta} x'' &&- \daleth_x^{x''} \daleth_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \frac{dx'_1}{dx} \bar{\delta} x''.
\end{aligned}
$$

La première face cylindrique F'_1 aura pour expression (article 124)

$$\int dx \daleth_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 . \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2},$$

et, par suite, sa variation tronquée, calculée au moyen de la formule 13 (article 112), en observant que $\bar{\delta}\sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2}$

est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dx'_1}{dx}\right)^2}}\dfrac{d.\,\bar{\delta}x'_1}{dx}.\dfrac{dx'_1}{dx}$, et en faisant, pour abréger $p'=\sqrt{1+\left(\dfrac{dx'_1}{dx}\right)^2}$, sera

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \dfrac{1}{p'}\dfrac{dx'_1}{dx}\dfrac{d\bar{\delta}x'_1}{dx}} \\
+\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x''_2} p'\,\bar{\delta}x''_2 & -\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x'_2} p'\,\bar{\delta}x'_2 \\
+\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x''_2} p'\dfrac{dx''_2}{dx_1}\bar{\delta}x'_1 & -\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x'_2} p'\dfrac{dx'_2}{dx_1}\bar{\delta}x'_1 \\
+\rceil_{x}^{x''}\rceil_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\, p'\,\bar{\delta}x'' & -\rceil_{x}^{x_1}\rceil_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\, p'\,\bar{\delta}x'.
\end{array}
$$

Comme le premier terme de cette variation est susceptible de la transformation recommandée à l'article 84, nous effectuerons cette transformation au moyen de la formule 33 de l'article 115, et nous trouverons que la variation tronquée de cette face peut se mettre sous la forme

$$
F'_1\quad
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{-\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\int dx_2 \dfrac{d\left(\dfrac{1}{p'_1}\dfrac{dx'_1}{dx}\right)}{dx}\bar{\delta}x'_1} \\
-\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x''_2}\dfrac{1}{p'}\dfrac{dx'_1}{dx}.\dfrac{dx''_2}{dx}\bar{\delta}x'_1 & +\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x'_2}\dfrac{1}{p'}\dfrac{dx'_1}{dx}\dfrac{dx'_2}{dx}\bar{\delta}x'_1 \\
-\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x''_2}\dfrac{1}{p'}\dfrac{dx'_1}{dx}\dfrac{dx''_2}{dx_1}\dfrac{dx'_1}{dx}\bar{\delta}x'_1 & +\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x'_2}\dfrac{1}{p'}\dfrac{dx'_1}{dx}\dfrac{dx'_2}{dx_1}\dfrac{dx'_1}{dx}\bar{\delta}x'_1 \\
+\rceil_{x}^{x''}\rceil_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\dfrac{1}{p'}\dfrac{dx'_1}{dx}\bar{\delta}x'_1 & -\rceil_{x}^{x'}\rceil_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\dfrac{1}{p'}\dfrac{dx'_1}{dx}\bar{\delta}x'_1 \\
+\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x''_2} p'\,\bar{\delta}x''_2 & -\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x'_2} p'\,\bar{\delta}x'_1 \\
+\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x''_2} p'\dfrac{dx''_2}{dx_1}\bar{\delta}x'_1 & -\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x'_2} p'\dfrac{dx'_2}{dx_1}\bar{\delta}x'_1 \\
+\rceil_{x}^{x''}\rceil_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\, p'\,\bar{\delta}x'' & -\rceil_{x}^{x'}\rceil_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\, p'\,\bar{\delta}x'.
\end{array}
$$

La seconde face cylindrique F''_1 aura pour expression

$$\int dx \rceil_{x_1}^{x''_1}\int dx_2\sqrt{1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2},$$

et par suite sa variation tronquée, calculée comme la précédente, sera (en faisant, pour abréger $p'' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2}$):

$$
\begin{aligned}
&- \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \frac{d.\left(\frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx}\right)}{dx} \bar{\delta} x''_1 \\
&- \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx}\frac{dx''_2}{dx} \bar{\delta} x''_1 \qquad + \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx}\frac{dx'_2}{dx} \bar{\delta} x''_1 \\
&- \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}\frac{dx''_1}{dx} \bar{\delta} x''_1 + \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} \bar{\delta} x''_1 \\
F''_1 \;&+ \urcorner_{x}^{x''} \urcorner_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx} \bar{\delta} x''_1 \qquad - \urcorner_{x}^{x'} \urcorner_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx} \bar{\delta} x''_1 \\
&+ \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} p'' \,\bar{\delta} x''_2 \qquad - \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} p'' \,\bar{\delta} x'_2 \\
&+ \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} p'' \frac{dx''_2}{dx_1} \bar{\delta} x''_1 \qquad - \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_1}^{x'_1} p'' \frac{dx'_2}{dx_1} \bar{\delta} x''_1 \\
&+ \urcorner_{x}^{x''} \urcorner_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \, p'' \,\bar{\delta} x'' \qquad - \urcorner_{x}^{x'} \urcorner_{x_2}^{x''_2} \int dx_2 \, p'' \,\bar{\delta} x'.
\end{aligned}
$$

La face inférieure F'_2 aura pour expression (article 122)

$$\int dx \int dx_1 \,\urcorner_{x_2}^{x'_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2};$$

par suite, en observant que si l'on fait, pour abréger,

$$q' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2},$$

l'on a

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dx}\right)^2} = \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{d\bar{\delta} x'_2}{dx} + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}\frac{d\bar{\delta} x'_2}{dx_1},$$

la variation tronquée de cette expression, calculée au moyen de la formule 12, article 112, sera égale à

$$
\begin{aligned}
&\int dx \int dx_1 \,\urcorner_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{d\bar{\delta} x'_2}{dx} + \int dx \int dx_1 \,\urcorner_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{d\bar{\delta} x'_2}{dx_1} \\
&+ \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} q' \,\bar{\delta} x''_1 - \int dx \,\urcorner_{x_1}^{x'_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} q' \,\bar{\delta} x'_1 \\
&+ \urcorner_{x}^{x''} \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x'_2} q' \,\bar{\delta} x'' - \urcorner_{x}^{x'} \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x'_2} q' \,\bar{\delta} x'.
\end{aligned}
$$

Comme les deux premiers termes de cette variation sont susceptibles des transformations recommandées aux articles 84 et 85, nous effectuerons ces transformations au moyen des formules 32 (article 115) et 37 (article *idem*). De cette manière, elle se changera en (x'_2 ne renfermant pas x_2)

$$-\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x'_2} \left(\frac{d\,\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}}{dx} + \frac{d\,\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}}{dx_1}\right)\overline{\delta x'_2}$$

$$-\int dx \rceil_{x_1}^{x''_1}\rceil_{x_2}^{x'_2}\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx}\overline{\delta x'_2} + \int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x'_2}\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx}\overline{\delta x'_2}$$

$$F'_2 \quad +\rceil_{x}^{x''}\int dx_1 \rceil_{x_2}^{x'_2}\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\overline{\delta x'_2} \qquad - \rceil_{x}^{x'}\int dx_1\rceil_{x_2}^{x'_2}\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\overline{\delta x'_2}$$

$$+\int dx \rceil_{x_1}^{x''_1}\rceil_{x_2}^{x'_2}\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}\overline{\delta x'_2} \qquad - \int dx\rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x'_2}\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}\overline{\delta x'_2}$$

$$+\int dx\rceil_{x_1}^{x''_1}\rceil_{x_2}^{x'_2} q'\,\overline{\delta x''_1} \qquad - \int dx\rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x'_2}q'\,\overline{\delta x'_1}$$

$$+\rceil_{x}^{x''}\int dx_1\rceil_{x_2}^{x'_2}q'\,\overline{\delta x''} \qquad - \rceil_{x}^{x'}\int dx_1\rceil_{x_2}^{x'_2}q'\,\overline{\delta x'}.$$

Enfin la face supérieure F''_2 aura pour expression

$$\int dx \int dx_2 \rceil_{x_2}^{x''_2}\sqrt{1+\left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)^2},$$

et par suite, un calcul semblable au précédent donnera pour sa variation tronquée (en faisant, pour abréger),

$$q'' = \sqrt{1+\left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)^2}:$$

$$-\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x''_2} \left(\frac{d\,\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}}{dx} + \frac{d\,\frac{1}{q'}\frac{dx''_2}{dx_1}}{dx_1}\right)\overline{\delta x''_2}$$

$$-\int dx \rceil_{x_1}^{x''_1}\rceil_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{d''x_1}{xp}\overline{\delta x''_2} + \int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx}\overline{\delta x''_2}$$

$$F''_2 \quad +\rceil_{x}^{x''}\int dx_1 \rceil_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\overline{\delta x''_2} \qquad - \rceil_{x_1}^{x'_1}\int dx_1\rceil_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\overline{\delta x''_2}$$

$$+\int dx \rceil_{x_1}^{x''_1}\rceil_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}\overline{\delta x''_2} \qquad - \int dx\rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}\overline{\delta x''_2}$$

$$+ \int dx\, 7_{x_1}^{x''_1}\, 7_{x_2}^{x''_2}\, q''\, \overline{\delta x''_1} \qquad - \int dx\, 7_{x_1}^{x'_1}\, 7_{x_2}^{x''_2}\, q''\, \overline{\delta x'_1}$$

$$+ 7_{x}^{x''} \int dx_1\, 7_{x_2}^{x''_2}\, q''\, \overline{\delta x''} \qquad - 7_{x}^{x'} \int dx_1\, 7_{x_2}^{x''_2}\, q''\, \overline{\delta x'};$$

et comme, d'ailleurs, la grandeur de la surface est supposée connue, la somme des variations que nous avons signalées en marge par les lettres F′, F″, F'_1, F''_1, F'_2, F''_2, doit être nulle (article 80).

134. Maintenant, pour former l'équation aux variations $V = 0$, il faudra, d'après la théorie connue des multiplicateurs, ajouter à la variation du volume celle de la surface multipliée par un facteur constant $\frac{1}{c}$ dont la valeur devra être déterminée plus tard. Et comme, d'ailleurs, nous avons vu, article 80, qu'il suffit d'avoir égard aux variations tronquées, nous trouverons pour l'équation $V = 0$:

1 $$0 = \int dx \int dx_1\, 7_{x_2}^{x''_2} \left\{ c - \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}}{dx} - \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}}{dx_1} \right\} \overline{\delta x''_2}$$

2 $$+ \int dx\, 7_{x_1}^{x''_1}\, 7_{x_2}^{x''_2} \left\{ p'' - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1} \right\} \overline{\delta x''_2}$$

3 $$+ \int dx\, 7_{x_1}^{x'_1}\, 7_{x_2}^{x''_2} \left\{ p' + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1} \right\} \overline{\delta x''_2}$$

4 $$+ 7_{x}^{x''} \int dx_1\, 7_{x_2}^{x''_2} \left\{ 1 + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx} \right\} \overline{\delta x''_2}$$

5 $$+ 7_{x}^{x'} \int dx_1\, 7_{x_2}^{x''_2} \left\{ 1 - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx} \right\} \overline{\delta x''_2}$$

6 $$- \int dx \int dx_1\, 7_{x_2}^{x'_2} \left\{ c + \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx'_2}{dx}}{dx} + \frac{d\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}}{dx_1} \right\} \overline{\delta x'_2}$$

7 $$- \int dx\, 7_{x_1}^{x''_1}\, 7_{x_2}^{x'_2} \left\{ p'' + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx''_1}{dv} - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1} \right\} \overline{\delta x'_2}$$

8 $$- \int dx\, 7_{x_1}^{x'_1}\, 7_{x_2}^{x'_2} \left\{ p' - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1} \right\} \overline{\delta x'_2}$$

9 $$- 7_{x}^{x''} \int dx_1\, 7_{x_2}^{x'_2} \left\{ 1 - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx} \right\} \overline{\delta x'_2}$$

10 $$- 7_{x}^{x'} \int dx_1\, 7_{x_2}^{x'_2} \left\{ 1 + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx} \right\} \overline{\delta x'_2}$$

11 .... $+\int dx \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \left\{ c - \frac{d\frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx}}{dx} \right\} \bar{\delta} x''_1$

12 $+\int dx \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x''_1} \mathop{\rceil}\limits_{x_2}^{x''_2} \left\{ q'' + \left(p'' - \frac{1}{p''}\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2\right)\frac{dx''_2}{dx_1} - \frac{1}{p''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} \right\} \bar{\delta} x''_1$

13 .... $+\int dx \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x''_1} \mathop{\rceil}\limits_{x_2}^{x'_2} \left\{ q' - \left(p'' - \frac{1}{p''}\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2\right)\frac{dx'_2}{dx} + \frac{1}{p''}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} \right\} \bar{\delta} x''_1$

14 $+\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x''} \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \left\{ 1 + \frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx} \right\} \bar{\delta} x''_1$

15 .... $+\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x'} \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \left\{ 1 - \frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx} \right\} \bar{\delta} x''_1$

16 $-\int dx \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \left\{ c + \frac{d\frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx}}{dx} \right\} \bar{\delta} x'_1$

17 .... $-\int dx \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x'_1} \mathop{\rceil}\limits_{x_2}^{x''_2} \left\{ q'' - \left(p' - \frac{1}{p'}\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2\right)\frac{dx''_2}{dx_1} + \frac{1}{p'}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} \right\} \bar{\delta} x'_1$

18 $-\int dx \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x'_1} \mathop{\rceil}\limits_{x_2}^{x'_2} \left\{ q' + \left(p' - \frac{1}{p'}\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2\right)\frac{dx'_2}{dx_1} - \frac{1}{p'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} \right\} \bar{\delta} x'_1$

19 .... $-\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x''} \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \left\{ 1 - \frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx} \right\} \bar{\delta} x'_1$

20 $-\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x'} \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \left\{ 1 + \frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx} \right\} \bar{\delta} x'_1$

21 .... $+\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x''} \int dx_1 \int dx_2 \left\{ c \right\} \bar{\delta} x''$

22 $+\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x''} \int dx_1 \mathop{\rceil}\limits_{x_2}^{x''_2} \left\{ q'' + \frac{dx''_2}{dx} \right\} \bar{\delta} x''$

23 .... $+\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x''} \int dx_1 \mathop{\rceil}\limits_{x_2}^{x'_2} \left\{ q' - \frac{dx''_2}{dx} \right\} \bar{\delta} x''$

24 $+\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x''} \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \left\{ p'' + \frac{dx''_1}{dx} \right\} \bar{\delta} x''$

25 .... $+\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x''} \mathop{\rceil}\limits_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \left\{ p' - \frac{dx'_1}{dx} \right\} \bar{\delta} x''$

26 $-\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \left\{ c \right\} \bar{\delta} x'$

27 .... $-\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x'} \int dx_1 \mathop{\rceil}\limits_{x_2}^{x''_2} \left\{ q'' - \frac{dx''_2}{dx} \right\} \bar{\delta} x'$

28 $-\mathop{\rceil}\limits_{x}^{x'} \int dx_1 \mathop{\rceil}\limits_{x_2}^{x'_2} \left\{ q' + \frac{dx'_2}{dx} \right\} \bar{\delta} x'$

29 . . . . $-\rceil_{x}^{x'}\rceil_{x_1}^{x''_1}\int dx_2\left\{p''-\frac{dx''_1}{dx}\right\}\overline{\delta x'}$

30 $\qquad -\rceil_{x}^{x'}\rceil_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\left\{p'+\frac{dx'_1}{dx}\right\}\overline{\delta x'}$,

dont nous avons numéroté les termes, afin de rendre les citations plus faciles.

135. Comme nous avons effectué les transformations prescrites dans le paragraphe 3, chapitre II, à mesure que nous en avons vu la nécessité, l'équation $V = 0$ que nous venons de former se trouve toute préparée, et nous pouvons lui appliquer immédiatement les règles des articles 98 et 102.

136. Comme cette équation $V = 0$ de l'article 134 ne renferme que les variations tronquées $\overline{\delta x'}$, $\overline{\delta x''}$, $\overline{\delta x'_1}$, $\overline{\delta x''_1}$, $\overline{\delta x'_2}$, $\overline{\delta x''_2}$, dont aucune ne renferme la variable x_2, nous n'aurons aucune équation indéfinie, proprement dite, se rapportant aux points intérieurs du volume cherché.

137. Tous les termes qui renferment la variation $\overline{\delta x''_2}$ diffèrent les uns des autres par les signes

$$\rceil_{x}^{x'},\ \rceil_{x}^{x''},\ \rceil_{x_1}^{x'_1},\ \rceil_{x_1}^{x''_1},\ \rceil_{x_2}^{x'_2},\ \rceil_{x_2}^{x''_2},\ \int dx,\ \int dx_1:$$

chacun d'eux fournira donc une équation distincte, qui devra avoir lieu dans toute l'étendue des limites compatibles avec la forme de ce terme, *à moins toutefois que cette étendue ne doive être nulle.*

Ainsi, le premier terme nous donnera

$$\rceil_{x_2}^{x''_2}\left(c-\frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}}{dx}-\frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}}{dx_1}\right)=0,$$

qui devra avoir lieu dans toute l'étendue de la face supérieure F''_2, et que nous pourrons écrire sous la forme

$$c-\frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}}{dx}-\frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}}{dx_1}=0,$$

puisque x''_2, et par suite $q'' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)^2}$, ne renfermant point la variable x_2, le signe $\urcorner_{x_2}^{x''_2}$ ne peut avoir aucune influence (article 5).

De même, le sixième terme nous donnera

$$c + \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_2}}{dx} + \frac{d\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}}{dx_1} = 0$$

pour l'équation de la face inférieure F'_2.

Ces deux équations ne diffèrent que par la notation des résultats déjà obtenus par ceux qui ont traité cette question. Il n'en est pas de même des équations que vont nous donner les autres termes de l'équation $V = 0$ de l'article 134, et que nous allons considérer dans les articles suivants.

138. Le second terme de l'équation de l'article 134 nous donnera

$$\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} \left(p'' - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}\right) = 0,$$

qui aura lieu dans toute l'étendue de l'arête commune aux faces F''_1 et F''_2.

Maintenant, nous multiplierons les deux membres de cette dernière par l'expression

$$\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} \left(p'' + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}\right),$$

et en vertu de la formule 18 (article 14),

$$\urcorner_p^q \urcorner_{p_1}^{q_1} (u.v) = \urcorner_p^q \urcorner_{p_1}^{q_1} u \,.\, \urcorner_p^q \urcorner_{p_1}^{q_1} v\ ^{[1]}:$$

cela nous donnera pour résultat

$$\urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{(q'')^2}\left(p''^2 q''^2 - \left(\frac{dx''}{dx}\frac{dx''_1}{dx_1}\right)^2 - \left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)^2 + 2\cdot\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}\frac{dx''_1}{dx}\right) = 0;$$

[1] Dans cette formule, les fonctions p, p_1, q, q_1, u, v, w, peuvent être quelconques comme à l'article 14.

alors nous remplacerons le produit $p''^2 q''^2$ par le produit équivalent

$$\left\{1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)^2\right\},$$

que nous développerons; de cette manière, la dernière équation trouvée se mettra sous la forme

$$\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{q''^2}\left(1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx_1}\frac{dx''_1}{dx}\right)^2+2\,\frac{dx''_2}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\,\frac{dx''_1}{dx}\right)=0,$$

ou bien encore sous la forme

$$\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{q''^2}\left(1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx}+\frac{dx''_2}{dx_1}\,\frac{dx_1}{dx}\right)^2\right)=0,$$

et enfin, en vertu de la formule déjà citée (article 14),

$$\int_p^q\int_{p_1}^{q_1}\left(uvw\right)=\int_p^q\int_{p_1}^{q_1}u\,.\int_p^q\int_{p_1}^{q_1}v\,.\int_p^q\int_{p_1}^{q_1}w\ [1],$$

elle pourra se mettre encore sous la forme

$$\left(\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{q''}\right)^2\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2}\left(1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx}+\frac{dx''_2}{dx_1}\,\frac{dx''_1}{dx}\right)^2\right)=0:$$

d'où nous conclurons qu'il faut que l'on ait

$$\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{q''}=0,$$

et que, par conséquent,

Pour tous les points de l'arête qui sépare les deux faces F''_1 et F''_2, le plan tangent à cette dernière est vertical comme celui de la face cylindrique F''_1.

De là, et de ce que cette arête est commune aux deux faces, nous conclurons que ces deux faces doivent se raccorder.

[1] Dans cette formule, les fonctions p, p_1, q, q_1, u, v, w, peuvent être quelconques comme à l'article 14.

139. Les troisième, quatrième et cinquième termes de l'équation $V = 0$ de l'article 134 nous donneront

$$7_{x_1}^{x'_1}\, 7_{x_2}^{x''_2} \left(p' + \frac{1}{q'}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} - \frac{1}{q'}\frac{dx''_2}{dx_1}\right) = 0,$$

$$7_{x}^{x''}\, 7_{x_2}^{x''_2} \left(1 + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\right) = 0,$$

$$7_{x}^{x'}\, 7_{x_2}^{x''_2} \left(1 - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\right) = 0;$$

Et en traitant chacune d'elles d'une manière analogue à celle du dernier article, nous en conclurons que la surface supérieure doit se raccorder encore avec les trois autres faces adjacentes F'_1, F'' et F'.

140. Nous avons déjà donné (article 37) l'équation de la face inférieure F'_2, qui doit provenir du sixième terme de l'équation $V = 0$ de l'article 134. Les termes 7, 8, 9 et 10, étant irréductibles, nous donneront les équations

$$7_{x_1}^{x''_1}\, 7_{x_2}^{x'_2} \left(p'' + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}\right) = 0,$$

$$7_{x_1}^{x'_1}\, 7_{x_2}^{x'_2} \left(p' - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}\right) = 0,$$

$$7_{x}^{x''}\, 7_{x_2}^{x'_2} \left(1 - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\right) = 0,$$

$$7_{x}^{x'}\, 7_{x_2}^{x'_2} \left(1 + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\right) = 0,$$

que nous traiterons comme les précédentes, et d'où nous conclurons que

La face inférieure F'_2 doit aussi se raccorder avec chacune des faces F''_1, F'_1, F'' et F' qui lui sont adjacentes.

141. Comme la variation $\overline{\delta x''_1}$ ne dépend que de x, et non de x_1 ou x_2, il faudra grouper séparément les termes affectés du signe $\int dx$, ceux qui sont affectés du signe $7_x^{x''}$, ceux qui sont affectés du signe $7_x^{x'}$, et qui renferment en même temps cette variation (article 102).

Nous devrons agir de même relativement aux termes qui renferment $\overline{\delta x'_1}$: dès lors, en remplaçant

$$p'' - \frac{1}{p''}\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2 \text{ par } \frac{1}{p''},$$

et

$$p' - \frac{1}{p'}\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2 \text{ par } \frac{1}{p'},$$

en vertu des relations

$$p' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2},\ p'' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2},$$

cela nous donnera les six équations suivantes :

$$\daleth_{x_1}^{x''_1}\left\{\int dx_2\left(c - \frac{d\frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx}}{dx}\right) + \daleth_{x_2}^{x''_2}\left(q'' + \frac{1}{p''}\frac{dx''_2}{dx_1} - \frac{1}{p''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx}\right) + \daleth_{x_2}^{x'_2}\left(q' - \frac{1}{p''}\frac{dx'_2}{dx_1} + \frac{1}{p''}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx}\right)\right\} = 0,$$

$$\daleth_{x}^{x''}\daleth_{x_1}^{x''_1}\int dx_2\left(1 + \frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx}\right) = 0,$$

$$\daleth_{x}^{x'}\daleth_{x_1}^{x''_1}\int dx_2\left(1 - \frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx}\right) = 0,$$

$$\daleth_{x_1}^{x'_1}\left\{\int dx_2\left(c + \frac{d\frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx}}{dx}\right) + \daleth_{x_2}^{x''_2}\left(q'' - \frac{1}{p'}\frac{dx''_2}{dx_1} + \frac{1}{p'}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx}\right) \daleth_{x_2}^{x'_2}\left(q' + \frac{1}{p'}\frac{dx'_2}{dx} - \frac{1}{p'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx}\right)\right\} = 0,$$

$$\daleth_{x}^{x''}\daleth_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\left(1 - \frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx}\right) = 0,$$

$$\daleth_{x}^{x'}\daleth_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\left(1 + \frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx}\right) = 0.$$

De ces six équations, les quatre dont la forme est la plus simple peuvent servir à prouver que les faces cylindriques F'_1, F''_1, doivent se raccorder avec chacune des deux faces planes F' et F''.

D'ailleurs, comme les fonctions x'_2, x''_2 x'_3, x'', et par suite

q', q'', p', p'', ne renferment point la variable x_2, on pourra effectuer immédiatement les intégrations par rapport au signe $\int dx_2$ et supprimer les signes $\urcorner^{x''_2}_{x_2}$, $\urcorner^{x'_2}_{x_2}$. Comme cela présente aussi peu de difficulté que d'intérêt, nous ne nous arrêterons point à écrire les résultats.

142. Comme les variations tronquées $\overline{\delta x''}$, $\overline{\delta x'}$, ne peuvent pas renfermer les variables x, x_1, x_2, chacune d'elles ne donnera lieu qu'à une seule équation aux limites, savoir :

$$\urcorner^{x''}_{x}\left\{\begin{array}{l}\int dx_1 \int dx_2 . c . + \int dx_1 \urcorner^{x''_2}_{x_2}\left(q'' + \frac{dx''_2}{dx}\right) + \int dx_1 \urcorner^{x'_2}_{x_2}\left(q' - \frac{dx'_2}{dx}\right)\\ \qquad + \urcorner^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 \left(p'' + \frac{dx''_1}{dx}\right) + \urcorner^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 \left(p' - \frac{dx'_1}{dx}\right)\end{array}\right\} = 0$$

$$\urcorner^{x'}_{x}\left\{\begin{array}{l}\int dx_1 \int dx_2 . c . + \int dx_1 \urcorner^{x''_2}_{x_2}\left(q'' - \frac{dx''_1}{dx}\right) + \int dx_1 \urcorner^{x'_2}_{x_2}\left(q' - \frac{dx'_2}{dx}\right)\\ \qquad + \urcorner^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 \left(p'' - \frac{dx''_1}{dx}\right) + \urcorner^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 \left(p' - \frac{dx'_1}{dx}\right)\end{array}\right\} = 0.$$

143. Telles sont les diverses équations auxquelles la surface cherchée devra satisfaire. Comme d'ailleurs il nous paraît difficile d'en tirer plus que nous ne l'avons fait, nous nous bornerons à indiquer que l'on peut supprimer les signes $\urcorner^{x''_2}_{x_2}$ et $\urcorner^{x'_2}_{x_2}$ dans toutes ces équations, parce qu'aucune d'elles ne renferme x_2.

2.

144. Pour seconde application, nous chercherons les équations, soit indéfinies, soit aux limites, d'où dépend la solution de la question suivante :

Quelle doit être la loi des densités des molécules d'un corps dont la forme, la position et la masse sont connues, pour que, en supposant que v exprime la densité d'une molécule dont les coordonnées seraient x, x_1, x_2, l'intégrale

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_2}\right)^2},$$

soit un minimum? Il est, d'ailleurs, sous-entendu que cette intégrale doit être prise dans toute l'étendue du corps cherché.

145. De ce que la forme et la position du corps sont connues, les variations $\overline{\delta}x'$, $\overline{\delta}x''$, $\overline{\delta}x'_1$, $\delta''x_1$, $\overline{\delta}x'_2$, $\overline{\delta}x''_2$, doivent être supposées nulles.

146. La masse du corps cherché a pour expression

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2\, v,$$

et, par suite, sa variation tronquée sera (au moyen des considérations de l'article précédent):

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2\, \overline{\delta}v.$$

Comme la masse est supposée donnée, sa variation doit être nulle; d'un autre côté, c'est une expression définie, et, par conséquent, sa variation complète ou sa variation tronquée sont égales: nous aurons donc l'équation de condition (voir articles 80 et 81)

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2\, \overline{\delta}v = 0.$$

147. Par un motif semblable, pour que l'expression

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_2}\right)^2},$$

soit un minimum, il faut que la variation tronquée soit nulle (article 79). Or, cette variation sera (en faisant pour abréger

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_2}\right)^2} = r\Bigg),$$

égale à

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \left(\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{d\overline{\delta}v}{dx} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{d\overline{\delta}v}{dx_1} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_2}\frac{d\overline{\delta}v}{dx_2}\right),$$

pourvu que l'on ait égard aux conditions de l'article 145.

148. Maintenant, nous aurons l'équation aux variations $V = 0$. En ajoutant l'expression de l'article précédent avec celle de l'article 146, multipliée par une constante c, convenablement déterminée, nous aurons donc

$$0 = \int dx \int dx_1 \int dx_2 \left\{ c\overline{\delta}v + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{d\overline{\delta}v}{dx} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{d\overline{\delta}v}{dx_1} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_2}\frac{d\overline{\delta}v}{dx_2} \right\}.$$

149. Pour passer de cette équation à l'équation $V_3 = 0$, nous commencerons par transformer le terme

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{d\overline{\delta}v}{dx},$$

au moyen de la formule 31 de l'article 115 : cela nous donnera pour résultat équivalent

$$-\int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{d\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}}{dx}\,\overline{\delta}v$$
$$+ \daleth_{x}^{x''} \int dx_1 \int dx_2 . \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}.\,\overline{\delta}v \quad - \daleth_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}.\,\overline{\delta}v$$
$$-\int dx \daleth_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 . \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx''_1}{dx}\overline{\delta}v + \int dx \daleth_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 . \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx'_1}{dx}\overline{\delta}v$$
$$-\int dx \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x''_2} . \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx''_2}{dx}\overline{\delta}v + \int dx \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx'_2}{dx}\overline{\delta}v.$$

Après cela, nous transformerons le terme

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 . \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{d\overline{\delta}v}{dx_1},$$

au moyen de la formule 35 de l'article 115 : cela nous donnera pour résultat équivalent

$$-\int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{d\frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}}{dx_1}\overline{\delta}v$$
$$+ \int dx \daleth_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 . \frac{1}{r}\frac{dx}{dx_1}\overline{\delta}v - \int dx \daleth_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 . \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\overline{\delta}v$$
$$-\int dx \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x''_2} . \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{dx''_2}{dx_1} + \int dx \int dx_1 \daleth_{x_2}^{x'_2} . \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{dx'_2}{dx_1}\overline{\delta}v.$$

Enfin, nous transformerons le terme

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 . \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2} \frac{d\overline{\delta v}}{dx_2}$$

au moyen de la formule 39 de l'article 115, et nous trouverons pour résultat équivalent

$$-\int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{d \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2}}{dx_2}$$
$$+ \int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2} \overline{\delta v} - \int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2} \overline{\delta v}.$$

150. Si, maintenant, nous substituons les différents résultats que nous venons de trouver dans l'équation aux variations de l'article 148, nous trouverons, pour l'équation $V_3 = 0$ réduite à la forme la plus simple,

$$\begin{aligned}
0 = &\int dx \int dx_1 \int dx_2 \left\{ c - \frac{d \frac{1}{r} \frac{dv}{dx}}{dx} - \frac{d \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_1}}{dx_1} - \frac{d \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2}}{dx_2} \right\} \overline{\delta v} \\
&- \int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x''_2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \frac{dx''_2}{dx} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_1} \frac{dx''_2}{dx_1} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2} \right\} \overline{\delta v} \\
&+ \int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x'_2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \frac{dx'_2}{dx} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_1} \frac{dx'_2}{dx_1} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2} \right\} \overline{\delta v} \\
&- \int dx \rceil_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \frac{dx''_1}{dx} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_1} \right\} \overline{\delta v} \\
&+ \int dx \rceil_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \frac{dx'_1}{dx} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_1} \right\} \overline{\delta v} \\
&+ \rceil_{x}^{x''} \int dx_1 \int dx_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \right\} \overline{\delta v} \\
&- \rceil_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \right\} \overline{\delta v}.
\end{aligned}$$

151. Comme la variation $\overline{\delta v}$ peut renfermer les trois variables x, x_1, x_2, les différents termes de cette équation sont irréductibles, et chacun d'eux donnera une équation, soit indéfinie,

soit aux limites, que l'on formera en supprimant les signes d'intégration. Nous aurons donc pour résultat

$$c - \frac{d\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}}{dx} - \frac{d\frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}}{dx_1} - \frac{d\frac{1}{r}\frac{dv}{dx_2}}{dx_2} = 0,$$

$$\int_{x_2}^{x''_2}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx''_2}{dx} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{dx''_2}{dx_1} - \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_2}\right\} = 0,$$

$$\int_{x_2}^{x'_2}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx''_2}{dx} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{dx'_2}{dx_1} - \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_2}\right\} = 0,$$

$$\int_{x_1}^{x''_1}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx''_1}{dx} - \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\right\} = 0,$$

$$\int_{x_1}^{x'_1}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx'_1}{dx} - \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\right\} = 0,$$

$$\int_{x}^{x''}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\right\} = 0,$$

$$\int_{x}^{x'}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\right\} = 0.$$

La première de ces équations se rapportera à tous les points du corps; la seconde à la face supérieure F''_2; la troisième, aux points de la face inférieure F'_2; la quatrième, à ceux de la face cylindrique F''_1; la cinquième, à ceux de la face cylindrique F'_1; la sixième, à ceux de la face plane F''; enfin, la dernière, à ceux de la face plane F'.

152. Si, par cas, il est possible de ramener le cas particulier que l'on traite à celui d'une surface dont tous les points seraient donnés par une seule équation $w = 0$ en x, x_1 et x_2, les six équations aux limites du dernier article se réduiront à cette équation unique

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dx_1}\frac{dw}{dx_1} + \frac{dv}{dx_2}\frac{dw}{dx_2}\right\} = 0$$

qui devra être satisfaite par tous les points de la surface du corps: ce qui peut avoir lieu de deux manières différentes, qu'il faudra discuter séparément.

3.

153. Pour troisième et dernière application, nous chercherons les équations d'où dépend la solution de la question suivante :

Quelle doit être la loi des densités des molécules d'un corps dont on connaît la forme et la position, pour que, en désignant par v la densité de la molécule ayant x, x_1, x_2, pour coordonnées et par w une fonction quelconque donnée de x, x_1, x_2 et v, l'intégrale

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2\ w \frac{d^3v}{dx\, dx_1\, dx_2},$$

soit un maximum (ou un minimum), en supposant, d'ailleurs, cette intégrale prise dans toute l'étendue du corps?

154. Comme dans le dernier paragraphe, les variations tronquées $\overline{\delta x'}$, $\overline{\delta x''}$, $\overline{\delta x'_1}$, $\overline{\delta x''_1}$, $\overline{\delta x'_2}$, $\overline{\delta x''_2}$, devront être nulles, et, par suite, l'équation aux variations $V = 0$ sera

$$0 = \int dx \int dx_1 \int dx_2 .\ \overline{\delta}\ w \frac{d^3v}{dx\, dx_1\, dx_2},$$

c'est-à-dire

$$0 = \int dx \int dx_1 \int dx_2 .\ \frac{dw}{dv} \frac{d^3v}{dx\, dx_1\, dx_2}\ \overline{\delta} v$$

$$+ \int dx \int dx_1 \int dx_2 .\ w \frac{d^3\overline{\delta} v}{dx\, dx_1\, dx_2}.$$

155. Le second terme de cette équation est passible des transformations prescrites dans les articles 84, 85,....., et auxquelles nous allons procéder.

D'abord, au moyen de la formule 31 de l'article 115, l'expression

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2\ w \frac{d^3\overline{\delta} v}{dx\, dx_1\, dx_2}$$

se transformera en

$$-\int dx \int dx_1 \int dx_2 .\ \frac{dw}{dx}\ \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\ dx_2},$$

$$+\ 7_{x}^{x''} \int dx_1 \int dx_2 .\ w\ \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\,dx_2} \qquad -\ 7_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2\ w\ \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\ dx_2}$$

$$-\int dx\ 7_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\ w .\ \frac{dx''_1}{dx}\ \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\,dx_2} + \int dx\ 7_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\ w\ \frac{dx'_1}{dx}\ \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\ dx_2}$$

$$-\int dx \int dx_1\ 7_{x_2}^{x''_2}\ w\ \frac{dx''_2}{dx}\ \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\,dx_2} + \int dx \int dx_1\ 7_{x_2}^{x'_2}\ w\ \frac{dx'_2}{dx}\ \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\ dx_2}.$$

Ces derniers termes étant encore eux-mêmes passibles de transformations, nous procéderons à celles qui se rapportent à la variable x_1, au moyen des formules 36 et 37 de l'article 115. Nous trouverons ainsi que leur somme peut être remplacée par

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2\ \frac{d^2w}{dx\ dx_1}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$-\int dx\ 7_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\ \frac{dw}{dx}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} \qquad + \int dx\ 7_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\ \frac{dw}{dx}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$+\int dx \int dx_1\ 7_{x_2}^{x''_2}\ \frac{dw}{dx}\ \frac{dx''_2}{dx_1}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} \qquad - \int dx \int dx_1\ 7_{x_2}^{x'_2}\ \frac{dw}{dx}\ \frac{dx_2}{dx_1}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$-\ 7_{x}^{x''} \int dx_1 \int dx_2\ \frac{dw}{dx_1}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$+\ 7_{x}^{x''}\ 7_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\ w\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} \qquad -\ 7_{x}^{x''}\ 7_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\ w\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$-\ 7_{x}^{x''} \int dx_1\ 7_{x_2}^{x''_2}\ w\ \frac{dx''_2}{dx_1}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} \qquad +\ 7_{x}^{x'} \int dx_1\ 7_{x_2}^{x'_2}\ w\ \frac{dx'_2}{dx_1}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$+\ 7_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2\ \frac{dw}{dx_1}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$-\ 7_{x}^{x'}\ 7_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\ w\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} \qquad +\ 7_{x}^{x'}\ 7_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\ w\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx'_2}$$

$$+\ 7_{x}^{x'} \int dx_1\ 7_{x_2}^{x''_2}\ w\ \frac{dx''_2}{dx_1}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} \qquad -\ 7_{x}^{x'} \int dx_1\ 7_{x_2}^{x'_2}\ w\ \frac{dx'_2}{dx}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$-\int dx\ 7_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\ w\ \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\,dx_2} \qquad + \int dx\ 7_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\ w\ \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\,dx_2}$$

$$+\int dx \int dx_1\ 7_{x_2}^{x''_2} \left(w\ \frac{d^2 x''_2}{dx\ dx_1} + \frac{dw}{dx_1}\ \frac{dx''_2}{dx}\right) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$-\int dx\ 7_{x_1}^{x''_1}\ 7_{x_2}^{x''_2}\ w\ \frac{dx''_2}{dx}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} \qquad + \int dx\ 7_{x_1}^{x'_1}\ 7_{x_2}^{x''_2}\ w\ \frac{dx''_2}{dx}\ \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$+\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x''_2} \frac{dw}{dx_2}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}\frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$+\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x''_2} w \frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}\frac{d^2\bar{\delta}v}{dx^2_2}$$

$$-\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x'_2} \left(w\frac{d^2x'_2}{dx\,dx_1}+\frac{dw}{dx_1}\frac{dx''_2}{dx}\right)\frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$+\int dx \rceil_{x_1}^{x''_1}\rceil_{x_2}^{x'_2} w \frac{dx'_2}{dx}\frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} \quad -\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\rceil_{x_2}^{x'_2} w\frac{dx'_2}{dx}\frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$-\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x'_2} \frac{dw}{dx_2}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1}\frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

$$-\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x'_2} w\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1}\frac{d^2\bar{\delta}v}{dx^2_2}.$$

Comme cette somme renferme encore des termes dans lesquels on trouve en même temps et le signe d'intégration $\int dx_2$ et la dérivée, $\frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$, nous transformerons ces derniers termes, et, substituant ces résultats dans l'équation $V = 0$ de l'article 154, nous aurons, pour l'équation $V_3 = 0$,

1 $$0 = \int dx \int dx_1 \int dx_2 \left(\frac{dw}{dv}\frac{d^3v}{dx\,dx_1\,dx_2} - \frac{d^3w}{dx\,dx_1\,dx_2}\right)\bar{\delta}v$$

2 $$+\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x''_2}\left(\frac{d^2w}{dx\,dx_1}\right)\bar{\delta}v$$

3 $$+\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x''_2}\left(w\frac{d^2x''_2}{dx\,dx_1}+\frac{dw}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}+\frac{dw}{dx_1}\frac{dx''_2}{dx}+\frac{dw}{dx_2}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}\right)\frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

4 $$+\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x''_2}\left(w\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}\right)\frac{d^2\bar{\delta}v}{dx^2_2}$$

5 $$-\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x'_2}\left(\frac{d^2w}{dx\,dx_1}\right)\bar{\delta}v$$

6 $$-\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x'_2}\left(w\frac{d_2x'_2}{dx\,dx_1}+\frac{dw}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1}+\frac{dw}{dx_1}\frac{dx'_2}{dx}+\frac{dw}{dx_2}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1}\right)\frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

7 $$-\int dx \int dx_1 \rceil_{x_2}^{x'_2}\left(w\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1}\right)\frac{d^2\bar{\delta}v}{dx^2_2}$$

8 $$+\int dx \rceil_{x_1}^{x''_1}\int dx_2\left(\frac{d^2w}{dx\,dx_2}\right)\bar{\delta}v$$

9 $$\cdots\cdots+\int dx \rceil_{x_1}^{x''_1}\int dx_2\left(\frac{dw}{dx_2}\right)\frac{d\bar{\delta}v}{dx_1}$$

10 $$-\int dx \rceil_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\left(\frac{d^2w}{dx\,dx_2}\right)\bar{\delta}v$$

11 .... $-\int dx \urcorner_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2}\right) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_1}$

12 $+\urcorner_{x}^{x''} \int dx_1 \int dx_2 \left(\frac{d^2w}{dx_1\,dx_2}\right) \overline{\delta}v$

13 .... $-\urcorner_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \left(\frac{d^2w}{dx_1\,dx_2}\right) \overline{\delta}v$

14 $+\int dx \urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} \left(\frac{dw}{dx}\right) \overline{\delta}v$

15 .... $-\int dx \urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} (w) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_1}$

16 $-\int dx \urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} \left(w\frac{dx''_2}{dx}\right) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_2}$

17 .... $-\int dx \urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} \left(\frac{dw}{dx}\right) \overline{\delta}v$

18 .... $+\int dx \urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} (w) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_1}$

19 .... $+\int dx \urcorner_{x_1}^{x''_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} \left(w\frac{dx'_2}{dx}\right) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_2}$

20 $-\int dx \urcorner_{x_1}^{x'_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} \left(\frac{dw}{dx}\right) \overline{\delta}v$

21 .... $+\int dx \urcorner_{x_1}^{x'_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} (w) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_1}$

22 $+\int dx \urcorner_{x_1}^{x'_1} \urcorner_{x_2}^{x''_2} \left(w\frac{dx''_2}{dx}\right) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_2}$

23 .... $+\int dx \urcorner_{x_1}^{x'_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} \left(\frac{dw}{dx}\right) \overline{\delta}v$

24 $-\int dx \urcorner_{x_1}^{x'_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} (w) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_1}$

25 .... $-\int dx \urcorner_{x_1}^{x'_1} \urcorner_{x_2}^{x'_2} \left(w\frac{dx'_2}{dx}\right) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_2}$

26 $-\urcorner_{x}^{x''} \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x''_2} \left(\frac{dw}{dx_1}\right) \overline{\delta}v$

27 .... $-\urcorner_{x}^{x''} \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x''_2} \left(w\frac{dx''_2}{dx_1}\right) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_2}$

28 $+\urcorner_{x}^{x''} \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x'_2} \left(\frac{dw}{dx_1}\right) \overline{\delta}v$

29 .... $+\urcorner_{x}^{x''} \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x'_2} \left(w\frac{dx'_2}{dx_1}\right) \frac{d\overline{\delta}v}{dx_2}$

30 $+\urcorner_{x}^{x'} \int dx_1 \urcorner_{x_2}^{x''_2} (w) \overline{\delta}v$

31 . . . . $+\int_{x}^{x'} \int dx_1 \int_{x_2}^{x''_2} \left(w \frac{dx''_2}{dx_1}\right) \frac{d\overline{\delta v}}{dx_2}$

32 $-\int_{x}^{x'} \int dx_1 \int_{x_2}^{x'_2} (w)\ \overline{\delta v}$

33 . . . . $-\int_{x}^{x'} \int dx_1 \int_{x_2}^{x'_2} \left(w \frac{dx'_2}{dx_1}\right) \frac{d\overline{\delta v}}{dx_2}$

34 $-\int_{x}^{x'} \int_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2}\right) \overline{\delta v}$

35 . . . . $+\int_{x}^{x''} \int_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2}\right) \overline{\delta v}$

36 $+\int_{x}^{x'} \int_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2}\right) \overline{\delta v}$

37 . . . . $-\int_{x}^{x'} \int_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2}\right) \overline{\delta v}$

38 $+\int_{x}^{x''} \int_{x_1}^{x''_1} \int_{x_2}^{x''_2} (w)\ \overline{\delta v}$

39 . . . . $-\int_{x}^{x''} \int_{x_1}^{x''_1} \int_{x_2}^{x'_2} (w)\ \overline{\delta v}$

40 $-\int_{x}^{x''} \int_{x_1}^{x'_1} \int_{x_2}^{x''_2} (w)\ \overline{\delta v}$

41 . . . . $+\int_{x}^{x''} \int_{x_1}^{x'_1} \int_{x_2}^{x'_2} (w)\ \overline{\delta v}$

42 $-\int_{x}^{x'} \int_{x_1}^{x''_1} \int_{x_2}^{x''_2} (w)\ \overline{\delta v}$

43 . . . . $+\int_{x}^{x'} \int_{x_1}^{x''_1} \int_{x_2}^{x'_2} (w)\ \overline{\delta v}$

44 $+\int_{x}^{x'} \int_{x_1}^{x'_1} \int_{x_2}^{x''_2} (w)\ \overline{\delta v}$

45 . . . . $-\int_{x}^{x'} \int_{x_1}^{x'_1} \int_{x_2}^{x'_2} (w)\ \overline{\delta v}.$

156. Comme la variation $\overline{\delta v}$, qui entre dans l'équation que nous venons de calculer, peut être une fonction quelconque de x, x_1, x_2, chaque terme de cette équation fournira une équation, soit indéfinie, soit aux limites, que l'on formera en supprimant les signes d'intégration qui entrent dans ce terme, et qui aura lieu dans toute l'étendue compatible avec la forme de ce même terme (article 98).

Ainsi,

1° Le premier terme nous donnera l'équation indéfinie

$$\frac{dw}{dv}\,\frac{d^3v}{dx\,dx_1\,dx_2}-\frac{d^3w}{dx\,dx_1\,dx_2}=0,$$

qui aura lieu dans toute l'étendue du corps.

2° Les trois termes suivants nous donneront

$$\mathop{\rceil}\nolimits_{x_2}^{x''_2}\frac{d^2w}{dx\,dx_1}=0,$$

$$\mathop{\rceil}\nolimits_{x_2}^{x''_2}\left(w\frac{d^2x''_2}{dx\,dx_1}+\frac{dw}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}+\frac{dw}{dx_1}\,\frac{dx''_2}{dx}+\frac{dw}{dx_2}\,\frac{dx''_2}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\right)=0,$$

$$\mathop{\rceil}\nolimits_{x_2}^{x''_2}\left(w\frac{dx''_2}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\right)=0,$$

qui auront lieu dans toute l'étendue de la face supérieure F''_2.

D'ailleurs, comme x''_2 ne renferme point la variable x_2, la dernière pourra se mettre sous la forme

$$\frac{dx''_2}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\mathop{\rceil}\nolimits_{x_2}^{x''_2}w=0,$$

d'où nous conclurons

$$\mathop{\rceil}\nolimits_{x_2}^{x''_2}w=0.$$

Cette dernière, différentiée par rapport à x et à x_1, nous donnera

$$\mathop{\rceil}\nolimits_{x_2}^{x''_2}\left(\frac{dw}{dx}+\frac{dw}{dx_2}\,\frac{dx''_2}{dx}\right)=0,$$

$$\mathop{\rceil}\nolimits_{x_2}^{x''_2}\left(\frac{dw}{dx_1}+\frac{dw}{dx_2}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\right)=0,$$

dont la combinaison, avec la seconde des trois équations ci-dessus, conduit à

$$\mathop{\rceil}\nolimits_{x_2}^{x''_2}\frac{dw}{dx}=0,\quad \mathop{\rceil}\nolimits_{x_2}^{x''_2}\frac{dw}{dx_1}=0,\quad \mathop{\rceil}\nolimits_{x_2}^{x''_2}\frac{dw}{dx_2}=0.$$

Nous pourrons encore différentier ces dernières par rapport à

x et à x_1, et comparer les résultats avec ceux déjà trouvés, et ainsi de suite. De cette manière, nous arriverons à conclure que

Toutes les dérivées de w, d'un ordre quelconque, doivent se réduire à zéro toutes les fois que l'on remplacera x_2 par x''_2, c'est-à-dire, toutes les fois qu'il s'agira d'un point de la face F''_2.

3° Les trois termes suivants de l'équation aux variations de l'article 155 nous donneront

$$\int_{x_2}^{x'_2} \frac{d^2w}{dx\,dx_1} = 0,$$

$$\int_{x_2}^{x'_2} \left(w\frac{d^2x'_2}{dx\,dx_1} + \frac{dw}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1} + \frac{dw}{dx_1}\frac{dx'_2}{dx} + \frac{dw}{dx_2}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1} \right) = 0,$$

$$\int_{x_2}^{x'_2} \left(w\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1} \right) = 0,$$

qui auront lieu pour tous les points de la face inférieure F'_2 et qui fourniront des conclusions analogues aux précédentes.

4° Les huitième et neuvième termes nous donneront

$$\int_{x_1}^{x''_1} \frac{d^2w}{dx\,dx_2} = 0, \quad \int_{x_1}^{x''_1} \frac{dw}{dx_2} = 0,$$

qui auront lieu pour tous les points de la face cylindrique F''_1, et sur lesquels nous nous arrêterons un moment.

Faisons pour abréger

$$\int_{x_1}^{x''_1} w = P, \quad \int_{x_1}^{x''_1} \frac{dw}{dx} = Q,$$

en les différentiant par rapport à x_2, et observant que x''_1 ne renfermant pas cette variable, on a $\frac{dx''_1}{dx_2} = 0$, nous trouverons

$$\int_{x_1}^{x''_1} \frac{dw}{dx_2} = \frac{dP}{dx_2}, \quad \int_{x_1}^{x''_1} \frac{dw}{dx_2} = \frac{dQ}{dx_2},$$

dont la comparaison avec les équations ci-dessus nous montre que $\frac{dP}{dx_2} = 0$ et $\frac{dQ}{dx_2} = 0$, c'est-à-dire que les fonctions P et Q ne

doivent pas renfermer la variable x_2; mais alors, en désignant par q une fonction quelconque, nous aurons identiquement

$$\int_{x_2}^{q}\int_{x_1}^{x''_1} w = \int_{x_2}^{q} \mathrm{P} = \mathrm{P}, \quad \int_{x_2}^{q}\int_{x_1}^{x''_1} \frac{dw}{dx} = \int_{x_2}^{q} \mathrm{Q} = \mathrm{Q}.$$

D'un autre côté, les quatorzième et quinzième termes nous donneront

$$\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2} w = \mathrm{o}, \quad \int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2} \frac{dw}{dx} = \mathrm{o},$$

dont les premiers membres seront égaux aux précédents, si, par cas, on a pris pour q une valeur convenable (article 35); nous pouvons donc conclure que l'on doit avoir $\mathrm{P} = \mathrm{o}$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{o}$, c'est-à-dire

$$\int_{x_1}^{x''_1} w = \mathrm{o} \quad \text{et} \int_{x_1}^{x''_1} \frac{dw}{dx} = \mathrm{o}.$$

En partant de ces différentes équations et en les différentiant successivement une ou plusieurs fois, par rapport aux variables x et x_2, nous arriverons encore à la conclusion que

Pour tous les points de la face cylindrique F''_1, la fonction w et toutes ses dérivées doivent se réduire à zéro comme pour les faces déjà considérées.

5° Les dixième et onzième termes de l'équation aux variations nous donneront encore

$$\int_{x_1}^{x'_1} \frac{d^2w}{dx\,dx_2} = \mathrm{o}, \quad \int_{x_1}^{x'_1} \frac{dw}{dx_2} = \mathrm{o},$$

qui se rapportent aux points de la face cylindrique F'_1, et d'où nous pourrions tirer des conclusions analogues aux précédentes.

6° Les deux termes suivants nous donneront

$$\int_{x}^{x''} \frac{d^2w}{dx_1\,dx_2} = \mathrm{o}, \quad \int_{x}^{x'} \frac{d^2w}{dx_1\,dx_2} = \mathrm{o},$$

qui se rapportent, la première aux points de la face plane F″, et l'autre à ceux de la face plane F′.

Par des procédés analogues aux précédents, et au moyen des équations données par quelques-uns des termes suivants de l'équation aux variations, nous pourrons en déduire encore que

Pour tous les points de ces deux faces comme pour ceux des précédentes, la fonction w et toutes ses dérivées partielles doivent se réduire à zéro.

7° Enfin, les autres termes donneraient

$$\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2}\frac{dw}{dx}=0,\ \int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2}w=0,\ \int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x'_2}\frac{dw}{dx}=0,\ \int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x'_2}w=0,$$

$$\int_{x_1}^{x'_1}\int_{x_2}^{x''_2}\frac{dw}{dx}=0,\ \int_{x_1}^{x'_1}\int_{x_2}^{x''_2}w=0,\ \int_{x_1}^{x'_1}\int_{x_2}^{x'_2}\frac{dw}{dx}=0,\ \int_{x_1}^{x'_1}\int_{x_2}^{x'_2}w=0,$$

$$\int_{x}^{x''}\int_{x_2}^{x''_2}\frac{dw}{dx_1}=0,\ \int_{x}^{x''}\int_{x_2}^{x''_2}w=0,\ \int_{x}^{x''}\int_{x_2}^{x'_2}\frac{dw}{dx_1}=0,\ \int_{x}^{x''}\int_{x_2}^{x'_2}w=0,$$

$$,\ \int_{x}^{x'}\int_{x_2}^{x''_2}w=0,\qquad \int_{x}^{x'}\int_{x_2}^{x'_2}w=0,$$

$$\int_{x}^{x''}\int_{x_1}^{x''_1}\frac{d^2w}{dx_2}=0,\ \int_{x}^{x''}\int_{x_1}^{x''_1}w=0,\ \int_{x}^{x'}\int_{x_1}^{x''_1}w=0,\ \int_{x}^{x'}\int_{x_1}^{x'_1}w=0,$$

qui se rapportent aux différentes arêtes, et

$$\int_{x}^{x''}\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2}w=0,\qquad \int_{x}^{x''}\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x'_2}w=0,$$

$$\int_{x}^{x''}\int_{x_1}^{x'_1}\int_{x_2}^{x''_2}w=0,\qquad \int_{x}^{x''}\int_{x_1}^{x'_1}\int_{x_2}^{x'_2}w=0,$$

$$\int_{x}^{x'}\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x''_2}w=0,\qquad \int_{x}^{x'}\int_{x_1}^{x''_1}\int_{x_2}^{x'_2}w=0,$$

$$\int_{x}^{x'}\int_{x_1}^{x'_1}\int_{x_2}^{x''_2}w=0,\qquad \int_{x}^{x'}\int_{x_1}^{x'_1}\int_{x_2}^{x'_2}w=0,$$

qui se rapportent aux huit sommets.

En rapprochant les différentes conditions précédentes, qui se rapportent aux limites, on voit qu'elles se réduisent à signifier que,

Pour tous les points de la surface du corps dont il est question, il faut que l'on ait

$$w=0.$$

157. Si la forme connue du corps eût été comme celle d'un ellipsoïde, telle que nous l'avons supposée dans le premier cas de l'article 43, l'équation aux variations de l'article 154 se serait réduite aux sept premiers, aux seizième, dix-neuvième, vingt-deuxième et vingt-cinquième termes.

Nous terminerons cette application en faisant observer que, dans le calcul des dérivées $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dx_1}$, $\frac{dw}{dx_2}$, $\frac{d^2w}{dx\,dx_1}$, etc. la fonction v, qui, par hypothèse, entre dans la composition de w, doit être traitée comme une fonction des variables x, x_1, x_2. Comme la solution complète de la question que nous venons de traiter n'est point l'objet de nos recherches, nous ne croyons pas nécessaire de développer les équations qui, en ayant égard à cette considération, devraient remplacer celles que nous avons données, et dont elles ne seraient qu'une simple transformation.

ERRATUM.

Partout où l'on trouvera z comme indice, on doit remplacer cette lettre par λ : c'est ce qui doit avoir lieu notamment aux pages 34, 35-38.